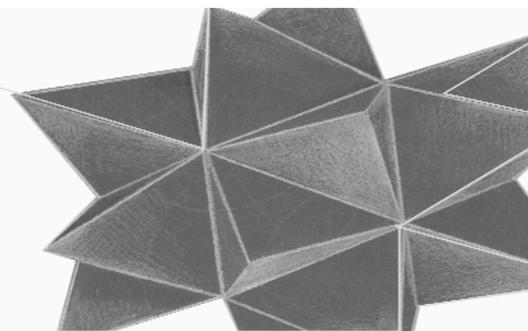


VESTIBULAR DE VERÃO 2014



Prova 3 - Matemática

QUESTÕES OBJETIVAS

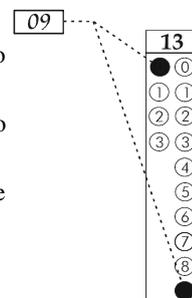
Nº DE ORDEM:

Nº DE INSCRIÇÃO:

NOME DO CANDIDATO:

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

1. Confira os campos Nº DE ORDEM, Nº DE INSCRIÇÃO e NOME, que constam na etiqueta fixada em sua carteira.
2. Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante na etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
3. **É proibido folhear o Caderno de Questões antes do sinal, às 9 horas.**
4. Após o sinal, confira se este caderno contém 40 questões objetivas e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
5. O tempo mínimo de permanência na sala é de 2 horas e 30 minutos, após o início da resolução da prova.
6. No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluso o de preenchimento da Folha de Respostas.
7. Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta para cada questão será a soma dos números associados às alternativas corretas. Portanto, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme o exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma, no exemplo, das alternativas corretas, 01 e 08).
8. Este Caderno de Questões não será devolvido. Assim, se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas, constante abaixo, e destaque-o para recebê-lo amanhã, ao término da prova.
9. Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas, o Rascunho para Anotação das Respostas.
10. São de responsabilidade do candidato a leitura e a conferência de todas as informações contidas no Caderno de Questões e na Folha de Respostas.



Corte na linha pontilhada.

RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS – PROVA 3 – VERÃO 2014

Nº DE ORDEM:

NOME:

Matemática

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20



UEM – Comissão Central do Vestibular Unificado

GABARITO 3

MATEMÁTICA – Formulário

<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Geometria Plana, Espacial e Analítica</p>	<p>Área do triângulo: $A = \frac{bh}{2}$</p> <p>Área do retângulo: $A = bh$</p> <p>Área do círculo: $A = \pi r^2$</p> <p>Comprimento da circunferência: $C = 2\pi r$</p> <p>Equação da circunferência: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$</p> <p>Lei dos senos: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$</p> <p>Lei dos cossenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$</p> <p>Área lateral do cilindro: $A = 2\pi rh$</p> <p>Volume do Cilindro: $V = \pi r^2 h$</p> <p>Distância entre dois pontos: $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$</p>
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Funções</p>	<p>Função quadrática</p> $x_v = \frac{-b}{2a}$ $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Trigonometria</p>	$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Progressões</p>	<p>Progressão Aritmética (P. A.):</p> $a_n = a_1 + (n-1)r$ $S_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2}$ <p>Progressão Geométrica (P. G.):</p> $a_n = a_1 q^{n-1}$

MATEMÁTICA

Questão 01

Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Com relação aos conceitos de matrizes e determinantes, assinale o que for **correto**.

01) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

02) $AB^t = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

04) A matriz A é invertível e a sua inversa também é invertível.

08) $\det(A) = \det(B^t)$.

16) $[\det(A) + \det(B)]^2 = \det(A^2) + \det(\sqrt{2} \cdot AB) + \det(B^2)$.

Questão 02

A taxa percentual ou porcentagem é a razão entre um número real x e o número 100, e é indicada por

$$x\% = \frac{x}{100}.$$

Sobre o conceito de porcentagem, assinale o que for **correto**.

01) $\sqrt{x\%} = (\sqrt{x})\%$ para qualquer $x > 0$.

02) $(x + a \cdot y)\% = x\% + a \cdot (y\%)$ para quaisquer $x, y, a \in \mathbb{R}$.

04) $(x + y)^2\% = (x\%)^2 + (2x \cdot y)\% + (y\%)^2$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

08) Se um vendedor diminui o preço de uma mercadoria de x reais para y reais, então o desconto concedido é de $\frac{100(x - y)}{x}\%$.

16) Se uma mercadoria com valor inicial x sofre aumentos sucessivos de $p_1\%$, $p_2\%$, ..., $p_n\%$, então o valor final dessa mercadoria é igual a $x \cdot (1 + p_1\%) \cdot (1 + p_2\%) \dots (1 + p_n\%)$.

Questão 03

João financiou uma casa em um banco, e a forma de pagamento ficou descrita da seguinte maneira: uma entrada de R\$ 10.000,00 e mais 120 prestações mensais na forma de uma progressão aritmética, sendo a primeira prestação no valor de R\$ 1.600,00, a segunda no valor de R\$ 1.589,00, a terceira no valor de R\$ 1.578,00, e assim por diante. Sobre o exposto, assinale o que for **correto**.

- 01) A razão r dessa progressão aritmética é $r = 11$.
- 02) O valor da última prestação será de R\$ 291,00.
- 04) O valor da 12ª prestação será de R\$ 1.468,00.
- 08) O valor total da casa a ser pago por João será de R\$ 123.460,00.
- 16) O termo geral dessa progressão aritmética pode ser expresso pela fórmula $a_n = 1600 + 11n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Questão 04

No plano cartesiano xy considere C_A a circunferência com centro em $O_A = (-4, 5)$ e raio $r_A = 3$, e C_B a circunferência definida pela equação $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ e centro O_B . Sobre o exposto, assinale o que for **correto**.

- 01) A distância entre O_A e O_B é $\sqrt{37}$.
- 02) A equação da reta que passa pelos centros de C_A e C_B é dada por $y = -\frac{1}{6}x + \frac{13}{3}$.
- 04) O raio da circunferência C_B é maior que o raio da circunferência C_A .
- 08) A distância entre C_B e o eixo Oy é maior que zero.
- 16) O ponto $(-4, 8) \notin C_A$.

Questão 05

Sabe-se que todo número complexo z pode ser escrito na forma $z = a + bi$, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$. Além disso, as funções $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$ são definidas por $\text{Re}(a + bi) = a$ e $\text{Im}(a + bi) = b$. Sobre os números complexos, assinale o que for **correto**.

- 01) Para quaisquer números complexos z e w vale a relação $\text{Re}(z.w) = \text{Re}(z).\text{Re}(w) - \text{Im}(z).\text{Im}(w)$.
- 02) A equação $(2a - bi)(-1 + i) = 1$ não possui solução para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.
- 04) O polinômio $x^3 - 6x^2 + 13x$ possui 3 raízes, sendo duas raízes reais e uma raiz complexa.
- 08) Multiplicar por i um ponto do plano complexo é equivalente a rotacionar esse ponto 90° no sentido anti-horário.
- 16) $i \in \mathbb{C}$ é uma solução da equação $x^{211} - i = 0$.

Questão 06

Assinale o que for **correto**.

01) $\frac{\left(\frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{7}{6}\right)} = \frac{15}{14}$.

02) $(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})$ é um número inteiro.

04) $-(3 - \frac{21}{6}) - \frac{1}{3} < 0$.

08) $3^{-2} - 2^{-3} = -(3^{-2})(2^{-3})$.

16) $\sqrt{\frac{1}{8}} < \frac{1}{8}$.

Questão 07

Um triângulo $\triangle ABC$ é isósceles e o ângulo interno com vértice em A é metade dos ângulos internos com vértices em B e C . Considerando:

- P o ponto de interseção da bissetriz do ângulo interno em A com o lado \overline{BC} ;
- Q o ponto de interseção da bissetriz do ângulo interno em B com o lado \overline{AC} ; e
- O o ponto de interseção de \overline{AP} e \overline{BQ} ,

assinale o que for **correto**.

- 01) O triângulo $\triangle ABQ$ também é isósceles e semelhante ao triângulo $\triangle ABC$.
- 02) Os segmentos \overline{AQ} , \overline{BQ} e \overline{BC} têm o mesmo comprimento.
- 04) A área do triângulo $\triangle ABC$ é igual a $\frac{AC \cdot BQ}{2}$ u.a.
- 08) A razão entre os segmentos \overline{BC} e \overline{AC} é igual a $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, que é o dobro de $\sin 18^\circ$.
- 16) A medida do ângulo $\sphericalangle AOB$ é menor que 120° .

Questão 08

Sobre as posições relativas entre pontos, retas e planos no espaço, assinale o que for **correto**.

- 01) Duas retas r e s são ortogonais quando são reversas e existe uma reta t , paralela a s e perpendicular a r .
- 02) Se um plano α é paralelo a uma reta r , então todas as retas do plano α são paralelas a r .
- 04) É possível ter retas paralelas contidas em planos que não sejam paralelos.
- 08) Se um plano α intercepta os planos β e γ formando um ângulo de 90° , então os planos β e γ são paralelos.
- 16) Considere as retas r , s e t . Se r é reversa a s e a reta s é concorrente a t , então r e t são reversas.

Questão 09

Um produtor de grãos armazena sua produção em um silo na forma de um cilindro reto de base circular com 3 metros de altura e 1 metro de raio. Para otimizar os custos de armazenamento, o produtor quer saber como alterar as medidas do silo para melhorar a relação entre a capacidade de armazenamento (volume do silo) e a quantidade de material utilizado na sua fabricação (área lateral do silo, incluindo as áreas da base e da tampa). Considerando essa situação, assinale o que for **correto** sobre as ações do produtor.

- 01) Se ele dobrar o raio e diminuir a altura pela metade, terá um silo com o mesmo volume e com a mesma área lateral.
- 02) Se ele dobrar apenas o raio, o novo silo terá o dobro do volume.
- 04) Se ele dobrar apenas a altura, o novo silo terá o dobro do volume.
- 08) Se ele diminuir o raio e a altura pela metade, então, proporcionalmente ao silo original, o volume irá diminuir mais do que a área lateral.
- 16) É impossível alterar o volume do silo original sem alterar a área lateral.

Questão 10

A quantidade de jogadores de ataque de um determinado time de futebol é igual ao dobro da quantidade de jogadores de defesa. Para avaliar o desempenho de cada setor, separaram-se os gols marcados em três tipos (A, B e C, conforme legenda abaixo) e computou-se a quantidade de gols de cada tipo marcado por cada setor, montando-se a seguinte tabela:

	tipo A	tipo B	tipo C
Defesa	9	7	4
Ataque	7	8	15

Tabela: Número de gols de cada tipo marcado por cada setor

Legenda:

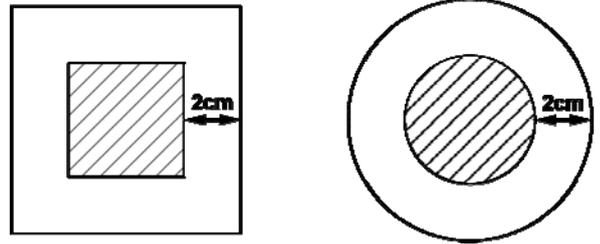
- tipo A: gols em cobrança de falta ensaiada.
- tipo B: gols em cobrança de falta direta.
- tipo C: gols em situação normal de jogo com a bola rolando.

Com base nas informações acima, assinale o que for **correto**.

- 01) A média de gols marcados pelos jogadores de defesa é maior do que a média de gols marcados pelos jogadores de ataque.
- 02) Os jogadores de ataque marcaram três quartos do total de gols do time.
- 04) A probabilidade de um gol ter sido marcado em uma cobrança de falta direta é 30%.
- 08) Sabendo-se que um gol foi marcado por um jogador de defesa, a probabilidade desse gol ter ocorrido em situação normal de jogo é igual a 8%.
- 16) Sabendo-se que um gol ocorreu numa cobrança de falta ensaiada, a probabilidade desse gol ter sido marcado por um jogador de ataque é menos de 50%.

Questão 11

Um carpinteiro fabrica molduras de madeira quadrangulares e circulares recortando um quadrado dentro de uma peça quadrada, e um círculo dentro de uma peça circular, de forma que a espessura seja constante igual a 2 cm, como mostram as figuras abaixo.



Considerando:

- A_1 = área recortada da moldura quadrangular (região hachurada);
- M_1 = área da moldura quadrangular (região cinza);
- A_2 = área recortada da moldura circular (região hachurada); e
- M_2 = área da moldura circular (região cinza),

assinale o que for **correto**.

- 01) Se $A_1 = A_2$, então $M_1 = M_2$.
- 02) Se $M_1 < M_2$, então $A_1 < A_2$.
- 04) Se $A_1 = M_1$, então o lado da moldura quadrangular (região hachurada) é $4(2 + \sqrt{2})$ cm.
- 08) Se $A_2 = M_2$, então o diâmetro da moldura circular (região hachurada) é $4(2 + \sqrt{2})$ cm.
- 16) As razões $\frac{A_1}{M_1}$ e $\frac{A_2}{M_2}$ são menores do que 2.

Questão 12

Em um determinado país, o imposto de renda de cada pessoa é calculado a partir de sua renda mensal. A função $I(x)$, que expressa o valor mensal do imposto em unidades monetárias (u.m.), em função do valor x da renda mensal dessa pessoa, também em u.m., é dada por

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1000 \\ 0,1 \cdot x - 100 & \text{se } 1000 \leq x < 2000 \\ 0,25 \cdot x - 400 & \text{se } 2000 \leq x < 5000 \\ 0,5 \cdot x - 1650 & \text{se } x \geq 5000 \end{cases}$$

Com base nessas informações, assinale o que for **correto**.

- 01) O imposto pago por qualquer pessoa desse país é menor do que 50% do valor da sua renda.
 02) Uma pessoa com renda mensal entre 1000 u.m. e 2000 u.m. paga de imposto 10% do valor da sua renda.
 04) Uma pessoa que paga de imposto 20% do valor da sua renda recebe mensalmente 5500 u.m.
 08) Descontando o imposto de renda, uma pessoa com renda mensal de 1001 u.m. irá receber menos do que uma pessoa com renda mensal de 999 u.m., já que esta última não precisa pagar imposto.
 16) O gráfico da função I é uma linha contínua formada pela união de segmentos de reta.

Questão 13

Dados a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, o logaritmo de b na base a , denotado por $\log_a b$, é o número real x tal que $a^x = b$, isto é,

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Considerando o exposto, assinale o que for **correto**.

01) $\log_{\frac{1}{9}} (\sqrt{3})^4 = -1$.

02) A função $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ é crescente para todo x no

domínio de f .

04) Se $\log_a b = 2$ e $\log_b 8 = 3$, então $a = \sqrt{2}$.

08) O sistema $\begin{cases} \log x - \log y = \log 5 \\ 3^{x-y} = 81 \end{cases}$

tem uma única solução.

16) O domínio da função $f(x) = \log_3(x^2 - 16)$ é o conjunto $\{x \in \mathbb{R}; x \neq \pm 4\}$.

Questão 14

Duas empresas de telefonia, A e B , têm os seguintes planos:

- Empresa A : cobra um valor fixo mensal de R\$ 19,90 e mais R\$ 0,15 por minuto no valor da ligação.
- Empresa B : cobra um valor fixo mensal de R\$ 29,90 e mais R\$ 0,05 por minuto no valor da ligação.

João contratou a empresa A e Maria contratou a empresa B . Sobre o exposto, assinale o que for **correto**.

- 01) Se Maria pagou uma fatura de telefone no valor de R\$ 79,90, então ela realizou mais de 950 minutos em ligações.
- 02) Se João realizar, em um mês, 300 minutos em ligações, então sua conta de telefone no final do mês será de R\$ 44,90.
- 04) Se João fizer a mesma quantidade de ligações (em minutos) que Maria, então o valor da conta de telefone dele é sempre menor que o valor da conta dela.
- 08) Se Maria fizer duas vezes mais minutos em ligações que João, então o valor da conta de telefone dela será sempre maior que o valor da conta de telefone dele.
- 16) Se uma pessoa utilizar no máximo 90 minutos em ligações por mês, então o plano da empresa A sairá mais barato que o plano da empresa B .

Questão 15

Considerando as funções reais f e g dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2 + 4x - 3$, e seus respectivos gráficos, assinale o que for **correto**.

- 01) O valor mínimo da função f é maior do que o valor máximo da função g .
- 02) A menor distância vertical entre o gráfico de f e o gráfico de g é igual a 1.
- 04) A interseção de uma reta horizontal com a união dos gráficos de f e g tem no máximo dois pontos.
- 08) Se a interseção de uma reta com a união dos dois gráficos é exatamente dois pontos, então ambos os pontos estão ou no gráfico de f ou no gráfico de g .
- 16) Existem infinitas retas que não intersectam nenhum dos dois gráficos.

Questão 16

Seja $a_0 = 0, a_1 = r, a_2 = 2r, \dots, a_n = nr, \dots$ uma progressão aritmética de razão r , cujo primeiro termo é zero. Considerando as funções reais dadas por $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$, onde x é medido em radianos, assinale o que for **correto**.

- 01) $f(a_{2n}) = 2 \cdot f(a_n) \cdot g(a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- 02) Se $r = \pi$, então $g(a_n)$ é uma progressão geométrica.
- 04) Se $r = \frac{\pi}{3}$, então $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{10}) = f(a_1)$.
- 08) Se r é um número inteiro, então $g(a_n) = g(a_0)$ para algum $n > 0$.
- 16) Se r é um número inteiro, então $f(a_n) \neq g(a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Questão 17

Sobre as funções f , g e h , definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1 \\ x-2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \text{e} \quad h(x) = |x^2 - 5|,$$

assinale o que for **correto**.

- 01) A função g é decrescente.
- 02) O domínio da função g é $D_g = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 1\}$.
- 04) $f(h(2)) = -1$.
- 08) A função h assume seu menor valor no vértice da parábola $y = x^2 - 5$.
- 16) A função f possui duas raízes.

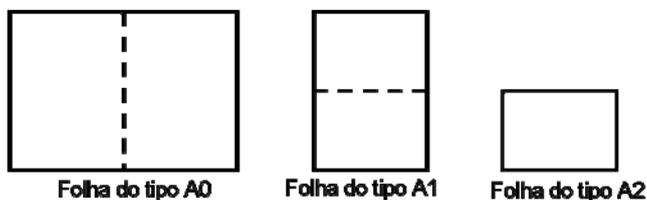
Questão 18

Numa brincadeira de roda, n crianças são colocadas igualmente espaçadas em torno de um círculo. Assinale o que for **correto**.

- 01) Numerando as crianças no sentido horário de 1 até n , se a criança 7 ficar posicionada diametralmente oposta à criança 15, então existem mais de 20 crianças na roda.
- 02) Se duas crianças da roda estão diametralmente opostas, então n é um número par.
- 04) Existem exatamente $(n-1)!$ formas distintas de dispor as crianças em roda.
- 08) Se cada duas crianças da roda estão conectadas por uma corda, então existem ao todo $n(n-1)$ cordas.
- 16) Se apenas quatro crianças, Arnaldo, Bernardo, Carlos e Diego, participam da brincadeira, a chance de Arnaldo estar entre Carlos e Diego é de 50%.

Questão 19

A norma ISO216 determina o padrão das folhas dos tipos A0, A1, A2 etc. Segundo essa norma, a folha de papel do tipo A0 deve ter área igual à 1m^2 . A folha do tipo A1 tem metade do tamanho de A0 e é obtida cortando-a em linha reta a partir dos pontos médios dos seus lados maiores. A folha A2, por sua vez, tem metade do tamanho de A1 e é obtida cortando-a ao meio ao longo da mediatriz do maior lado. De modo geral, para cada número natural $n \geq 0$, a folha $A(n+1)$ tem metade do tamanho de A_n e é obtida cortando-a ao longo da mediatriz do maior lado, como mostram as figuras abaixo. Para que as impressões não sejam distorcidas em eventuais ampliações ou reduções, a norma ISO216 determina ainda que a razão entre os lados de A_n e de $A(n+1)$ seja a mesma para todo n . Com base nesses dados, assinale o que for **correto**.



- 01) Se S_n é a área da folha A_n , então para qualquer $n > 1$, $S_0 > S_1 + S_2 + \dots + S_n$.
- 02) Para cada A_n , a razão entre o lado maior e o lado menor é o número de ouro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- 04) A diagonal da folha do tipo A1 é metade da diagonal da folha do tipo A0.
- 08) A diagonal da folha do tipo A4 é $1/4$ da diagonal da folha do tipo A0.
- 16) O maior lado da folha do tipo A0 mede $\sqrt[4]{2}$ m.

Questão 20

Ao efetuar a divisão de um polinômio $a(x)$ por outro $b(x)$, com coeficientes reais, obtemos polinômios $q(x)$ e $r(x)$, tais que $a(x) = b(x)q(x) + r(x)$ e grau de $r(x) <$ grau de $b(x)$. O polinômio $q(x)$ é dito o quociente (ou resultado) da divisão, e $r(x)$, o resto da divisão. Diz-se ainda que o polinômio $b(x)$ divide o polinômio $a(x)$ se o resto da divisão for o polinômio nulo, isto é, se $r(x) = 0$. Sobre essa situação, assinale o que for **correto**.

- 01) Se um polinômio divide tanto $a(x)$ quanto $b(x)$, então ele também divide o resto $r(x)$ da divisão de $a(x)$ por $b(x)$.
- 02) Se $b(x)$ divide os polinômios $a_1(x)$ e $a_2(x)$, então ele também divide a soma $a_1(x) + a_2(x)$.
- 04) Se $b(x)$ divide o produto $a_1(x) \cdot a_2(x)$ de dois polinômios, então $b(x)$ divide algum dos dois fatores, $a_1(x)$ ou $a_2(x)$.
- 08) O resto da divisão de $a(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ por $b(x) = x^2 - 1$ divide o quociente dessa mesma divisão.
- 16) Se $b(x)$ divide $a(x)$, então toda raiz de $b(x)$ também é raiz de $a(x)$.



UEM

Comissão Central do Vestibular Unificado