Prova 3 – Matemática

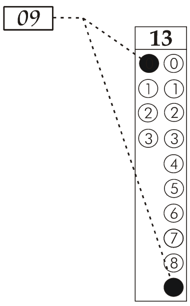
QUESTÕES OBJETIVAS

N.º DE ORDEM: **N.º DE INSCRIÇÃO:**

NOME DO CANDIDATO:

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

1. Confira os campos N.º DE ORDEM, N.º DE INSCRIÇÃO e NOME, que constam da etiqueta fixada em sua carteira.
2. Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante da etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
3. **É proibido folhear o Caderno de Questões antes do sinal, às 9 horas**.
4. Após o sinal, verifique se este caderno contém 20 questões objetivas e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
5. O tempo mínimo de permanência na sala é de 2 horas e 30 minutos após o início da resolução da prova.
6. No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluso o de preenchimento da Folha de Respostas.
7. Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta será a soma dos números associados às alternativas corretas. Para cada questão, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme o exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma das proposições 01 e 08).



8. Este Caderno de Questões não será devolvido. Assim, se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas, constante abaixo, e destaque-o, para recebê-lo hoje, no horário das 13h15min às 13h30min.
9. Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas e o Rascunho para Anotação das Respostas.
10. São de responsabilidade do candidato a leitura e a conferência de todas as informações contidas no Caderno de Questões e na Folha de Respostas.

Corte na linha pontilhada.

RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS – PROVA 3 – INVERNO 2014

N.º DE ORDEM: **NOME:**

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

UEM – Comissão Central do Vestibular Unificado

GABARITO 2

MATEMÁTICA – Formulário

Geometria Plana, Espacial e Analítica	Área do triângulo: $A = \frac{bh}{2}$ Área do retângulo: $A = bh$ Lei dos senos: $\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R$ Área do círculo $A = \pi r^2$ Volume da pirâmide: $V = \frac{1}{3} A \cdot h$ Volume da esfera: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
Funções	Função quadrática $x_v = \frac{-b}{2a}$ $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$
Progressões	Progressão Aritmética (P. A.): $a_n = a_1 + (n-1)r$ $S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$

GABARITO 2

MATEMÁTICA

Questão 01

Assinale o que for **correto**.

01) $\frac{14}{23} > \frac{4}{7}$.

02) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.

04) $\frac{1}{30} = 0{,}030303...$

08) 3,127 não é um número racional.

16) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$.

Questão 02

Considerando as funções reais *f*, *g* e *h* definidas, respectivamente, por $f(x) = 2^x \cos x$, $g(x) = x^2 - x - 1$ e $h(x) = x^2 - 2^x$, assinale o que for **correto**.

01) O menor número real pertencente à imagem da função *g* é $-\frac{5}{4}$.

02) O gráfico da função *f* não intercepta o eixo das abscissas.

04) $h(a) < 0$, para qualquer número real *a* pertencente ao intervalo $[0,1]$.

08) $f(0) = 1$.

16) A função *f* é injetora.

Questão 03

Considerando a sequência infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ cujo *n*-ésimo termo é dado por $a_n = 2n - 5$, assinale o que for **correto**.

01) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}$ é um número par.

02) Existem números pares nessa sequência.

04) Essa sequência é uma progressão aritmética.

08) Não existe um número natural *n* para o qual a soma $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$.

16) O primeiro termo dessa sequência é -3.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 04

Em uma circunferência de centro *O* e raio *r*, são marcados pontos *A*, *B*, *C* e *D* de modo que o quadrilátero *ABCD* seja convexo. Assinale o que for **correto**.

01) Se os pontos *A*, *B*, *C* e *D* estão contidos em uma mesma semicircunferência, o quadrilátero *ABCD* não pode ser um trapézio.
02) Se *ABCD* é um losango, então ele é um quadrado.
04) Se *ABCD* é um paralelogramo, então ele é um retângulo.
08) O quadrilátero *ABCD* é um retângulo se, e somente se, os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diâmetros da circunferência.
16) Se *ABCD* é um quadrado, sua área é maior do que dois terços da área do círculo.

Questão 05

Para um número complexo $z = a + bi$, sendo *a* e *b* reais e *i* satisfazendo $i^2 = -1$, associamos a matriz 2×2 $[z] = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. Com relação a isso, assinale o que for **correto**.

01) Existe um número complexo *z* para o qual $\det[z] < 0$.
02) Para quaisquer números complexos z_1 e z_2, $[z_1 + z_2] = [z_1] + [z_2]$.
04) Existe um número complexo $z \neq 0$, para o qual $\det[z] = 0$.
08) Para quaisquer números complexos z_1 e z_2, $[z_1 z_2] = [z_1][z_2]$.
16) $[1 + 0i]$ é a matriz identidade de ordem 2×2.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 06

Considere ABC um triângulo cujos ângulos internos $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$ medem, respectivamente, 72º e 36º. Considere, ainda, o ponto D sobre o lado AC de modo que o segmento $\overline{BD}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$, isto é, divide este ângulo em dois ângulos congruentes. Assinale o que for **correto**.

01) O triângulo ABC é isósceles.
02) Os triângulos ABC e ADB são semelhantes.
04) A razão entre as áreas dos triângulos BCD e ADB é igual à razão entre os comprimentos do maior lado e do menor lado do triângulo ADB.
08) $\text{sen}(A\hat{B}C) = 2\text{sen}(B\hat{C}A)$.
16) A razão entre os comprimentos do maior lado e do menor lado do triângulo ABC é um número racional.

Questão 07

João, seu irmão e mais seis amigos vão disputar um torneio individual de tênis da seguinte forma: os oito participantes serão divididos em dois grupos de quatro; cada jogador joga contra cada outro membro do seu grupo exatamente uma única vez e o melhor jogador de um grupo enfrenta o melhor do outro grupo em uma única partida final. Sabendo que a ordem pela qual os jogadores são escolhidos para formar um grupo não importa, assinale o que for **correto**.

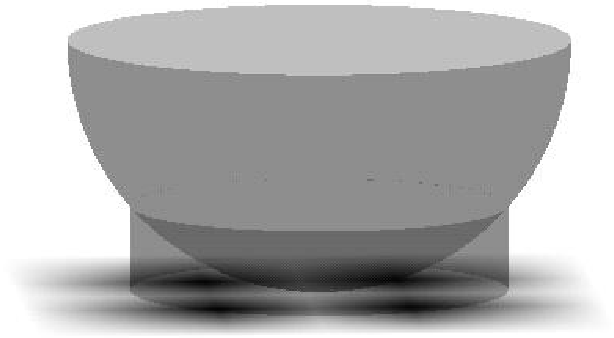
01) Uma vez escolhidos os grupos, existem exatamente 16 possibilidades diferentes para a partida final do torneio.
02) Haverá um total de 13 partidas no torneio.
04) Se João tem probabilidade 1/2 de vencer cada partida, então a probabilidade de ele se sagrar campeão invicto do torneio é igual a 1/16.
08) Existem exatamente 70 maneiras diferentes de formar um grupo.
16) Se João e seu irmão não puderem fazer parte de um mesmo grupo, há exatamente 50 maneiras diferentes de se formar um grupo.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 08

Sabendo que uma tigela possui formato de uma meia esfera de raio 20 cm (considere a espessura da tigela desprezível) e é mantida de boca para cima encaixada em um suporte cilíndrico de raio 10 cm, sem tampas, de modo que, quando totalmente apoiada no suporte, a tigela toca (tangencia) a superfície horizontal sobre a qual o suporte está apoiado, como na figura abaixo, assinale o que for **correto**.



01) Ao despejar, dentro da tigela, metade de sua capacidade em água, a profundidade da água dentro da tigela é maior do que 10 cm.
02) A altura do cilindro é inferior a 5 cm.
04) A porção da tigela que fica encaixada dentro do cilindro corresponde a mais da metade da capacidade da tigela.
08) A capacidade total da tigela é superior a 16 litros.
16) Quando planificado, o suporte cilíndrico torna-se um retângulo cujo lado maior mede menos de 50 cm.

Questão 09

Com base nos conhecimentos de geometria, assinale o que for **correto**.

01) Um triângulo possui, no máximo, um ângulo interno obtuso.
02) Quaisquer dois triângulos congruentes possuem a mesma área.
04) Quaisquer dois triângulos semelhantes são congruentes.
08) A área de um triângulo é sempre inferior à área do quadrado cujo lado possui a mesma medida do maior lado do triângulo.
16) O maior ângulo interno de um triângulo encontra-se em oposição ao maior lado do triângulo.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 10

Em um automóvel, a taxa de consumo instantâneo *C* do motor, em km/litro de combustível, depende apenas do módulo da velocidade instantânea *v*, em km/h, do automóvel e é dada pela função $C(v) = -0{,}001v^2 + 0{,}25v$, quando $0 < v \leq 100$. Assinale o que for **correto**.

01) O gráfico da função $C(v)$, no intervalo considerado, é um segmento de reta.
02) A função é crescente no intervalo $0 < v \leq 100$.
04) $C(100) = 15$ km/L.
08) Se o automóvel possui 40 litros de combustível no tanque e viaja à velocidade constante de 80 km/h, ele pode percorrer 500 km sem precisar abastecer.
16) Com velocidade constante *v* = 50 km/h, a cada hora, o automóvel consome 5 litros de combustível.

Questão 11

Considere *a* e *b* números naturais, $m = \text{mdc}(a,b)$ o maior divisor comum e $n = \text{mmc}(a,b)$ o menor múltiplo comum entre eles. Assinale o que for **correto** para quaisquer valores de *a* e *b*.

01) Todo divisor de *a* também é divisor de *m*.
02) Todo múltiplo de *a* também é múltiplo de *n*.
04) O maior divisor comum entre $a \cdot m$ e $b \cdot m$ é m^2.
08) O menor múltiplo comum entre $a \cdot n$ e $b \cdot n$ é n^2.
16) Se *k* é um múltiplo de *m* tal que $k > n$, então *n* é divisor de *k*.

Rascunho

Questão 12

Seja $p(x) = x^3 + b.x^2 + c.x + d$ um polinômio do terceiro grau cujos coeficientes b, c e d são números inteiros estritamente positivos. Considerando o teorema fundamental da álgebra e fatorando o polinômio na forma $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, em que x_1, x_2 e x_3 são suas raízes (possivelmente complexas), assinale o que for **correto**.

01) As raízes de $p(x)$ são diferentes de zero.
02) O polinômio $p(x)$ tem, pelo menos, duas raízes distintas.
04) A soma das três raízes é um número inteiro positivo.
08) As raízes inteiras, caso existam, são divisores de d.
16) Se todas as raízes de $p(x)$ forem inteiras, então todas são negativas.

Questão 13

Sabendo que o volume de um cubo de lado 10 cm é 1 litro, e 1 litro são 1.000 ml, assinale o que for **correto**.

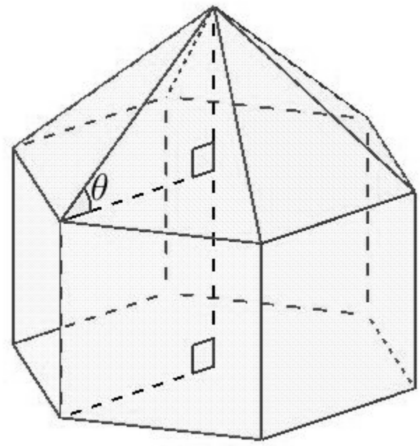
01) O volume de um tetraedro formado por quaisquer quatro vértices não coplanares de um cubo de lado 10 cm é 0,333... litros.
02) A área da base de uma piscina com volume de 1.000 litros, na forma de um cilindro reto com 50 cm de profundidade, é de 2 m^2.
04) O volume, em litros, de uma caixa de lados 15 cm, 20 cm e 30 cm é um quadrado perfeito.
08) $1\,\text{mm}^3 = 10^{-6}$ litros.
16) $1\,\text{m}^3 = 10$ litros.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 14

Um quiosque está situado sobre uma base com o formato de um hexágono regular de lado igual a 4 metros. Em cada vértice desse hexágono, existe um pilar com 3 metros de altura. O telhado do quiosque é formado por 6 triângulos isósceles com 25 % de inclinação ($\operatorname{tg}\theta = 0,25$), como mostra o desenho abaixo. Sobre esse quiosque, assinale o que for **correto**.



01) Se um tapete circular colocado na base está completamente contido no interior do quiosque, então seu raio é, no máximo, $2\sqrt{3}$ m.
02) O ponto mais alto do telhado do quiosque está a 4 metros do chão.
04) O telhado do quiosque tem área $12\sqrt{13}\,\text{m}^2$.
08) A área da base do quiosque é igual a 48 m^2.
16) A projeção ortogonal de cada triângulo do telhado sobre a base do quiosque é um triângulo equilátero.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 15

As coordenadas de um ponto P no plano cartesiano podem ser representadas por uma matriz coluna na forma $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Com essa representação matricial, o produto de uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, de tamanho 2×2, pela matriz $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ fornece uma nova matriz coluna $Q = A \cdot P$. A matriz Q, por sua vez, representa o ponto no plano cartesiano cujas coordenadas são as entradas das linhas dessa nova matriz. Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

assinale o que for **correto**.

01) O ponto $Q = D \cdot P$ é a projeção do ponto P sobre o eixo das abscissas (eixo x).
02) Se P for um ponto da reta $y = x$, então $Q = C \cdot P$ será um ponto da reta $y = 2x$.
04) Se $P = (2,1)$, então o ponto $Q = B \cdot P$ tem coordenadas $(3,2)$.
08) O ponto $Q = A \cdot P$ é simétrico ao ponto P com relação à reta $y = x$.
16) Se P é um ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, então $Q = C \cdot P$ é um ponto da elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

Questão 16

Sobre as posições relativas entre pontos, retas e planos no espaço, assinale o que for **correto**.

01) Dadas duas retas, existe um único plano que contém ambas.
02) Dados dois planos não paralelos, existe uma reta perpendicular a ambos.
04) Três pontos não colineares determinam um único plano.
08) Se uma reta r é perpendicular a um plano Π, então qualquer reta perpendicular a r ou é paralela ao plano Π, ou está inteiramente contida nele.
16) Dados uma reta r e um ponto P fora de r, existe um único plano que é perpendicular a r e que contém o ponto P.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 17

Deseja-se revestir externamente todas as faces de uma caixa retangular cujas arestas medem 40 cm, 48 cm e 60 cm. Para fazer esse trabalho, dispomos de dois tipos de pastilhas retangulares. Essas pastilhas são vendidas em pacotes com quantidades e preços conforme a tabela abaixo.

Pastilha	Tamanho da pastilha	Quantidade de pastilhas por pacote	Preço do pacote
Tipo A	5 cm x 8 cm	27	R$ 9,00
Tipo B	6 cm x 6 cm	30	R$ 10,00

Sobre esse problema, assinale o que for **correto**.

01) A área a ser revestida é igual a 1,44 m^2.
02) A área possível de se revestir com um pacote de pastilhas do tipo A é a mesma que pode ser revestida com um pacote de pastilhas do tipo B.
04) O custo, por unidade de área, da pastilha do tipo B é igual ao da pastilha do tipo A.
08) É impossível revestir a caixa com uma quantidade inteira de pastilhas do tipo A.
16) Se, ao cortar uma pastilha para utilizar apenas uma parte dela, a outra parte deve descartada, então, ao revestir a caixa com pastilhas do tipo B, serão descartados 192 cm^2.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 18

Em computação, o *bit* é a menor unidade de armazenamento de informação possível e cada bit tem a capacidade de armazenar duas informações distintas, geralmente representadas pelos valores 0 ou 1. Cada sequência de 8 bits, quando carregada com alguma informação, é chamada de *byte*. Por esse motivo, o byte também é utilizado como medida da quantidade de informação armazenada ou, em termos usuais na computação, como quantidade de memória. Sabe-se, por exemplo, que cada caractere num código de escrita (incluindo todas as letras maiúsculas e minúsculas, algarismos de 0 a 9, espaços e caracteres especiais) ocupa 1 byte de espaço na memória. Reciprocamente, cada byte é decodificado nesse código de escrita como um caractere. Considerando que

- 1 kilobyte = 2^{10} bytes;
- 1 megabyte = 2^{10} kilobytes;
- 1 gigabyte = 2^{10} megabytes;
- 1 terabyte = 2^{10} gigabytes,

assinale o que for **correto**.

01) Com um byte é possível representar, no máximo, 256 informações distintas.
02) Se, em um dispositivo de memória, a cada segundo, 1.024 bits são carregados com informações, então, em 10 minutos, esse dispositivo terá mais de 80 megabytes de memória armazenada.
04) O texto abaixo, contando os espaços como caracteres, está armazenado em 2^8 bits:
Universidade Estadual de Maringá
08) 1 terabyte = 2^{100} megabytes.
16) Escolhidos três bytes em sequência, a probabilidade de que no código de escrita a palavra representada seja *UEM* é $\left(\frac{1}{2}\right)^{24}$.

Rascunho

Questão 19

Um jogador de futebol realiza um chute em uma bola que sai com velocidade v = 15 m/s e em uma direção que faz um ângulo agudo θ com a horizontal, tal que $\cos\theta = 0{,}8$. A trajetória dessa bola é descrita pelas equações

$$x(t) = v\,t\cos\theta$$

$$y(t) = -5t^2 + v\,t\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

em que *x(t)* é a distância horizontal (em metros) percorrida pela bola durante *t* segundos após o chute, e *y(t)* é a altura da bola (em metros) no mesmo instante *t*. Considerando esse chute, assinale o que for **correto**.

01) O ângulo da direção de saída da bola foi menor do que 30º.
02) A altura *y* da bola em função da distância *x* percorrida por ela na horizontal é dada pela equação $y = \dfrac{108x - 5x^2}{144}$.
04) A bola volta a tocar o chão a 20 metros de distância do local do chute.
08) A bola atinge sua altura máxima no instante t = 0,9 segundos.
16) Se uma barreira com 2 metros de altura for colocada a 12 metros de distância do local do chute, então a bola irá esbarrar nessa barreira.

Questão 20

Considerando as funções reais f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = 4^x$ e $g(x) = \log_2 x$, assinale o que for **correto**.

01) Se $a_1, a_2, a_3, \ldots$ for uma progressão aritmética de razão 2, então $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots$ é uma progressão geométrica de razão 8.
02) Se $a_1, a_2, a_3, \ldots$ for uma progressão geométrica de razão 8, então $g(a_1), g(a_2), g(a_3), \ldots$ é uma progressão aritmética de razão 3.
04) A sequência $g(f(1)), g(f(2)), g(f(3)), \ldots$ é uma progressão aritmética de razão 2.
08) A sequência $f(g(1)), f(g(2)), f(g(3)), \ldots$ é uma progressão geométrica de razão 4.
16) $g\left(\dfrac{1}{2^1}\right) + g\left(\dfrac{1}{2^2}\right) + g\left(\dfrac{1}{2^3}\right) + \ldots + g\left(\dfrac{1}{2^{10}}\right) = -55.$

Rascunho

GABARITO 2