



## Prova 3 – Matemática

### QUESTÕES OBJETIVAS

**Nº DE ORDEM:**  
**NOME DO CANDIDATO:**

**Nº DE INSCRIÇÃO:**

### INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

- Confira os campos Nº DE ORDEM, Nº DE INSCRIÇÃO e NOME, conforme o que consta na etiqueta fixada em sua carteira.
- Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante na etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
- É proibido folhear o Caderno de Provas antes do sinal, às 9 horas.**
- Após o sinal, confira se este caderno contém 20 questões objetivas e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
- O tempo mínimo de permanência na sala é de 2 horas e 30 minutos após o início da resolução da prova.
- No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluso o de preenchimento da Folha de Respostas.
- Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta correta será a soma dos números associados às alternativas corretas. Para cada questão, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme o exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma das alternativas 01 e 08).
- Se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas, constante abaixo, e destaque-o, para retirá-lo hoje, nesta sala, no horário das 13h15min às 13h30min, mediante apresentação do documento original de identificação do candidato. Após esse período, não haverá devolução.
- Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas e o Rascunho para Anotação das Respostas.

09	13
	● ①
	① ①
	② ②
	③ ③
	④ ④
	⑤ ⑤
	⑥ ⑥
	⑦ ⑦
	⑧ ⑧
	●

Corte na linha pontilhada.

### RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS – PROVA 3 – INVERNO 2013

**Nº DE ORDEM:**

**NOME:**

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20



UEM – Comissão Central do Vestibular Unificado

**GABARITO 4**

## Questão 01

Uma ampulheta é formada por dois cones,  $C_1$  e  $C_2$ , retos, congruentes, dispostos sob um mesmo eixo e unidos pelo vértice. A ampulheta é apoiada sob uma mesa com o cone  $C_1$  na posição inferior e com sua base paralela ao chão. Suponha que  $C_1$  está completamente cheio de água e que, ao virar a ampulheta, a água escorre para o cone  $C_2$  com velocidade constante. O tempo necessário para que toda a água escorra é 2 minutos. Com respeito a essa situação, assinale o que for **correto**.

- 01) Depois de 1 minuto, o nível de água em cada um dos cones será a metade da altura do cone.
- 02) Entre 0 e 2 minutos, a velocidade com que o nível de água no cone  $C_2$  aumenta é crescente.
- 04) O tempo necessário para que o nível de água no cone  $C_2$  seja maior do que o nível de água no cone  $C_1$  é superior a 1 minuto e 30 segundos.
- 08) A área da superfície lateral da ampulheta que está em contato com a água é constante.
- 16) O nível de água no cone  $C_1$  é inversamente proporcional ao nível de água no cone  $C_2$ .

## Questão 02

Considere  $ABC$  um triângulo retângulo em  $B$  e no qual o ângulo  $\widehat{BCA}$  mede  $60^\circ$ . Considere ainda  $D$  sobre o segmento  $AB$  de modo que  $CD$  é bissetriz de  $\widehat{BCA}$ . A respeito do exposto, assinale o que for **correto**.

- 01) O segmento  $AB$  mede o triplo do comprimento do segmento  $BD$ .
- 02) O ângulo  $\widehat{CDB}$  mede  $45^\circ$ .
- 04) O segmento  $AC$  mede o dobro do comprimento do segmento  $BC$ .
- 08) O triângulo  $ADC$  é escaleno.
- 16) A medida, em radianos, do ângulo  $\widehat{CDA}$  é  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Questão 03**

Acerca das funções com domínio e contradomínio reais,  $f$  e  $g$ , dadas por  $f(x) = 2^x$  e  $g(x) = \frac{x-1}{x^2+2x+3}$ , assinale

o que for **correto**.

- 01) Para todo real negativo  $a$ ,  $f(a) < g(a)$ .  
 02) A função  $g$  está definida para todo  $x$  real.  
 04) A função  $f$  é sobrejetora.  
 08) A função  $f$  é crescente em todo seu domínio.  
 16) A imagem de  $g$  está contida no intervalo  $] -\infty, 1[$  da reta real.

**Questão 04**

Considerando  $b \geq 2$  um número natural, podem-se representar frações da unidade no sistema numérico de base  $b$  somando múltiplos de potências de  $b$  com expoentes negativos. Por exemplo,

$$[0, a_1 a_2 a_3]_b = a_1 \cdot b^{-1} + a_2 \cdot b^{-2} + a_3 \cdot b^{-3},$$

em que cada  $a_i$  é um número inteiro com  $0 \leq a_i \leq b-1$ .

As representações com infinitos dígitos correspondem a somas infinitas. Por exemplo,

$$[0, a_1 a_2 a_3 \dots]_b = a_1 \cdot b^{-1} + a_2 \cdot b^{-2} + a_3 \cdot b^{-3} + \dots$$

Com relação ao exposto, assinale o que for **correto**.

- 01)  $[0, 12]_3 = \frac{3}{25}$ .  
 02)  $[0, 222\dots]_5 = \frac{1}{2}$ .  
 04) Se  $c$  for um número natural maior do que  $b$ , então  $[0, a_1 a_2 a_3]_b < [0, a_1 a_2 a_3]_c$ .  
 08) Na base 6, a fração  $\frac{1}{3}$  possui uma representação finita.  
 16) Na base 2, a fração  $\frac{1}{3}$  possui uma representação finita.

**Questão 05**

Um número complexo  $a + ib$  pode ser identificado no plano cartesiano através do ponto com coordenadas  $(a, b)$ . Fixe um número natural  $n \geq 3$  e, para cada número natural  $k$ , defina o número complexo

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi \cdot k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi \cdot k}{n}\right).$$

Acerca desses números complexos e de sua representação no plano, assinale o que for **correto**.

01) Para todo número natural  $k \geq 1$ , o número complexo

$z_k$  é  $k$  vezes o número complexo  $z_1$ , isto é,

$$z_k = k \cdot z_1.$$

02) Para todo número natural  $k$ , o número complexo  $z_k$  é

raiz da equação  $z^n - 1 = 0$ .

04) O número complexo  $z_n$  é representado no plano pelo ponto com coordenadas  $(1, 0)$ .

08) Para todo número natural  $k$ , o número complexo  $z_k$  pertence a uma circunferência de raio 1.

16) A área do polígono com vértices  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  é

$$\frac{n}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

**Questão 06**

Uma partícula se move no plano cartesiano e, em cada instante  $t$  (em segundos), sua posição é dada pelas coordenadas  $P_t = (\operatorname{sen}(2\pi t), \operatorname{sen}^2(\pi t))$ . Com respeito ao movimento dessa partícula, assinale o que for **correto**.

01) A partícula se move apenas no primeiro quadrante.

02) A partícula se move no interior de um círculo de raio  $\sqrt{2}$ .

04) A partícula passa pelo ponto  $(0, 0)$  duas vezes em menos de um segundo.

08) A partícula cruza a reta de equação  $2y = x$  mais de uma vez a cada segundo.

16) A partícula descreve uma trajetória elíptica de equação  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ .

**Questão 07**

Considere as funções  $f$  e  $g$ , tendo como domínio e contradomínio o conjunto dos números reais, para as quais se tem  $f(3)=1$ ,  $f(4)=7$ ,  $g(3)=-8$ ,  $g(4)=7$  e  $g(5)=3$ . Assinale o que for **correto**.

01)  $(f + g)(3) = -f(4)$ .

02)  $(f \cdot g)(4) = 7$ .

04)  $(f \circ g)(5) = 3$ .

08) Se  $g$  possui inversa, então  $g^{-1}(f(4)) = 4$ .

16) Se  $f$  é uma função afim, sua expressão deve ser  $f(x) = 6x - 17$ .

**Questão 08**

Considerando as funções reais  $f$ ,  $g$  e  $h$ , dadas por  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \ln x$  e  $h(x) = x^2 + 1$ , é **correto** afirmar que

01)  $(h \circ f)(x) = 2 - \sin^2 x$ .

02) a função  $h \circ g$  está definida para todo  $x$  real.04) a função  $f \circ g$  assume um máximo em  $x = 1$ .08) a função  $g \circ h$  assume um mínimo em  $x = 0$ .16)  $(g \circ f)(x) \leq 0$  para todo  $x$  no seu domínio.**Questão 09**

Seja  $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  um polinômio de grau 4 com as seguintes propriedades:

- i. os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são números inteiros;
- ii. as raízes de  $P(x)$  são números inteiros que, quando colocadas em ordem crescente, formam uma progressão aritmética de razão  $r > 0$ .

Nessas condições, assinale o que for **correto**.

01) Se a soma das raízes é igual a zero, então o coeficiente  $a$  é igual a zero.02) Se a menor raiz de  $P(x)$  é igual à razão  $r$ , então o coeficiente  $d$  é múltiplo de 24.04) Se a menor raiz de  $P(x)$  é igual à razão  $r$ , então o coeficiente  $c$  é múltiplo de 50.08) O polinômio  $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$  goza das propriedades i e ii.16) O coeficiente  $b$  tem a mesma paridade da razão  $r$ , isto é, ambos são pares ou ambos são ímpares.

**Questão 10**

Seja  $P_{\text{ext}}$  um polígono circunscrito a uma circunferência  $\lambda$  e  $P_{\text{int}}$  o polígono inscrito em  $\lambda$  cujos vértices são os pontos onde  $P_{\text{ext}}$  tangencia  $\lambda$ . Sobre essa situação, assinale o que for **correto**.

- 01) Se  $P_{\text{ext}}$  é um triângulo isósceles, então  $P_{\text{int}}$  também é um triângulo isósceles.  
02) Se  $P_{\text{ext}}$  é um triângulo retângulo, então  $P_{\text{int}}$  também é um triângulo retângulo.  
04) Se  $P_{\text{ext}}$  é um quadrado, então  $P_{\text{int}}$  também é um quadrado.  
08) Se  $P_{\text{ext}}$  é um paralelogramo, então  $P_{\text{int}}$  é um retângulo.  
16) Se  $P_{\text{ext}}$  é um quadrilátero, então as diagonais de  $P_{\text{int}}$  são diâmetros de  $\lambda$ .

**Questão 11**

Assinale o que for **correto**.

- 01)  $15^3 = 10^3 + 5^3$ .  
02)  $\frac{125}{31} > \sqrt{16}$ .  
04)  $\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{7}\right) \cdot \frac{7}{8} - \frac{1}{40} = \frac{1}{4}$ .  
08)  $\log_3 9 + \log_9 18 = \log_3 18$ .

16)  $\left|\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{8}}\right| < \frac{1}{4}$ .

**Questão 12**

Considere um retângulo  $ABCD$  de lados  $AB = 6$  cm e  $BC = 3$  cm. Sobre o lado  $AB$ , marque o ponto  $E$ , tal que  $AE = 4$  cm, e, sobre o lado  $BC$ , marque o ponto  $F$ , tal que  $BF = 1$  cm. Denote por  $G$  o ponto de interseção dos segmentos  $AF$  e  $CE$ . Sobre a figura descrita acima, é **correto** afirmar que

- 01) os pontos  $B$ ,  $G$  e  $D$  são colineares.  
02) os triângulos  $AGE$  e  $CFG$  têm a mesma área.  
04) os triângulos  $GCD$  e  $GEB$  são semelhantes.  
08) a área do quadrilátero  $AGCD$  é o triplo da área do quadrilátero  $FGEB$ .  
16) os triângulos  $AGE$  e  $CFG$  são semelhantes.

Uma padaria produz bolos de três tipos. Para fazer 1 kg de cada um dos bolos, são necessários açúcar, farinha e ovos nas quantidades apresentadas na Tabela A abaixo. Na Tabela B, é apresentado o preço desses ingredientes.

	Açúcar	Farinha	Ovos
Bolo 1	0,2 kg	0,5 kg	2
Bolo 2	0,1 kg	0,7 kg	1
Bolo 3	0,4 kg	0,3 kg	4

Tabela A: Quantidade de ingredientes para fazer 1kg de bolo.

Preço	
Açúcar	R\$ 3,00 por quilo
Farinha	R\$ 2,00 por quilo
Ovos	R\$ 0,50 por unidade

Tabela B: Preço dos ingredientes.

Seja  $A$  a matriz de tamanho  $3 \times 3$  cujas entradas são as quantidades apresentadas na Tabela A, e  $B$  a matriz de tamanho  $3 \times 1$  cujas entradas são os valores apresentados na Tabela B. Com relação a essas informações, assinale o que for **correto**.

- 01) O gasto com açúcar, farinha e ovos para fazer o bolo do tipo 1 é maior do que nos demais.
- 02) O produto  $A \cdot B$  é uma matriz cujas entradas representam o custo de cada ingrediente para a produção de 1 kg de cada tipo de bolo.
- 04) Se a matriz  $X = [x \ y \ z]$  representa a quantidade de quilos de cada tipo de bolo produzido, então o produto  $X \cdot A$  é uma matriz que representa a quantidade de cada ingrediente que foi utilizado.
- 08) É impossível fazer os três tipos de bolos com exatamente três quilos de açúcar, dois quilos de farinha e uma dúzia de ovos.
- 16) O determinante da matriz  $A$  é não nulo.

**Questão 14****Rascunho**

Em uma cantina, os clientes pagam suas compras em dinheiro, e a cantina tem um lucro igual a 20% do valor das vendas. A fim de aumentar as vendas, a cantina decide contratar um serviço bancário que permite a seus clientes fazerem o pagamento com cartões bancários no mesmo preço que pagariam em dinheiro. Por esse serviço, a cantina deve pagar ao banco R\$ 50,00 por mês pelo aluguel da máquina de cartões e mais 2% do valor das vendas pagas com cartão. Sobre o exposto, assinale o que for **correto**.

- 01) Se a cantina vender somente R\$ 250,00 no mês com pagamento no cartão, então ela terá prejuízo.
- 02) Para uma venda no valor de R\$ 12,00 paga em dinheiro, a cantina lucra apenas R\$ 2,00.
- 04) Se  $x$  representa o valor das vendas da cantina que foram pagas em dinheiro, então o lucro  $L_d$  referente a essas vendas é dado pela função  $L_d(x) = 0,2x$ .
- 08) O lucro mensal obtido pela cantina ao vender R\$ 10.000,00 com pagamento no cartão é menor do que o lucro obtido ao vender R\$ 8.000,00 com pagamento em dinheiro.
- 16) Se  $y$  representa o valor mensal das vendas da cantina que foram pagas com cartão, então o lucro mensal  $L_c$  referente a essas vendas é dado pela função  $L_c(y) = 0,22y - 50$ .

**Questão 15**

Em um triângulo  $ABC$ , o lado  $AB$  mede 6 cm, e o lado  $BC$  mede 8 cm. Sabendo ainda que a circunferência  $\lambda_1$  com centro  $A$  e raio  $AB$  intercepta o segmento  $AC$  em  $D \neq C$ , e a circunferência  $\lambda_2$  de centro  $C$  e raio  $BC$  intercepta o segmento  $AC$  em  $E \neq A$ , assinale o que for **correto**.

- 01) A área desse triângulo não pode ser superior a  $24 \text{ cm}^2$ .
- 02) O lado  $AC$  é o maior dos lados em qualquer triângulo com as propriedades descritas.
- 04) Em qualquer triângulo, tal como descrito, o segmento  $DE$  mede 4 cm.
- 08) Se o lado  $AC$  mede 10 cm, a circunferência  $\lambda_1$  é tangente ao segmento  $BC$ .
- 16) O perímetro de  $ABC$  deve ser inferior a 28 cm.

**Questão 16**

Pedro e Tiago brincam de cara ou coroa usando uma moeda não viciada. Se saírem quatro caras (não necessariamente consecutivas) antes de saírem quatro coroas, Pedro vence; caso contrário, vence Tiago. Considerando que os lançamentos são eventos independentes, assinale o que for **correto**.

- 01) São necessários, no máximo, sete lançamentos para se determinar o vencedor.
- 02) A probabilidade de o jogo acabar após os quatro primeiros lançamentos é de  $1/8$ .
- 04) Se, nos dois primeiros lançamentos, saiu “cara”, a probabilidade de Pedro ser o vencedor é de  $1/4$ .
- 08) Se, nos três primeiros lançamentos, saiu “cara”, a probabilidade de sair “cara” no quarto lançamento é menor do que a de sair “coroa”.
- 16) A probabilidade de o jogo terminar antes do sétimo lançamento é superior a  $1/2$ .

**Questão 17**

Acerca da inequação  $x^2 + 4x + c \leq 0$  e de suas soluções reais, assinale o que for **correto**.

- 01) Para qualquer número inteiro  $c$ , o polinômio no primeiro membro da inequação pode ser decomposto no produto de dois polinômios de grau 1 e de coeficientes reais.
- 02) Existem dois valores distintos reais de  $c$  para os quais a inequação possui uma única solução.
- 04) Para  $c = 4$ , o conjunto-solução da inequação possui um único elemento.
- 08) Considere  $t_1$  e  $t_2$  números reais, com  $t_1 < t_2$ , que satisfazem a inequação quando  $c = 0$ . Se  $t_1 \leq t \leq t_2$ , então  $t$  também satisfaz a inequação quando  $c = 0$ .
- 16) Se  $t$  é um número real que satisfaz a inequação para  $c = 1$ , então  $-4 - t$  também satisfaz a inequação.

**Rascunho**

**Questão 18**

Considerando  $A$  o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que satisfazem a equação  $2x - 4y = 0$ ,  $B$  o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que satisfazem a equação  $x^2 + y^2 = 1$  e  $C$  o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que satisfazem a equação  $x - y^2 = 0$ , assinale o que for **correto**.

- 01)  $B$  corresponde a uma circunferência, e  $C$  corresponde a uma parábola.  
02)  $A$  e  $B$  não possuem pontos em comum.  
04)  $B$  e  $C$  não possuem pontos em comum.  
08) Os pontos de  $A$  também satisfazem a equação  $x - 2y = 1$ .  
16)  $A$  e  $C$  possuem dois pontos em comum.

**Questão 19**

Considere  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  uma progressão geométrica infinita de números reais na qual  $a_1 = 1$  e a razão é  $\frac{1}{2}$ . Assinale o que for **correto**.

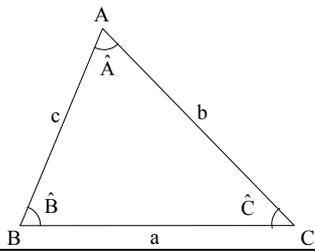
- 01) Existem termos negativos na sequência.  
02) Os três primeiros termos da sequência formam uma progressão aritmética.  
04)  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} > 2$ .  
08) Todos os termos da sequência são números racionais.  
16)  $a_3 = \frac{1}{4}$ .

**Questão 20**

Considerando um cubo cuja aresta mede 2 cm e que está inscrito em uma esfera (isto é, os vértices do cubo pertencem à esfera), assinale o que for **correto**.

- 01) O volume do cubo é  $8 \text{ cm}^3$ .  
02) O raio da esfera é  $\sqrt{3} \text{ cm}$ .  
04) A área total do cubo é  $12 \text{ cm}^2$ .  
08) São doze os pontos comuns ao cubo e à esfera.  
16) O cubo ocupa mais da metade do volume da esfera.

# MATEMÁTICA – Formulário

Trigonometria	$(\operatorname{sen} x)^2 + (\operatorname{cos} x)^2 = 1$	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p><i>Lei dos cossenos:</i></p> <math display="block">a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \operatorname{cos}(\hat{A})</math> </div> </div>
Geometria Plana e Espacial	<p>Comprimento da circunferência: <math>C = 2\pi R</math></p> <p>Área do triângulo:</p> $A = \frac{bh}{2}$ <p>Área do retângulo: <math>A = bh</math></p> <p>Área lateral do cone: <math>A = \pi Rg</math></p>	<p>Volume do prisma: <math>V = B \cdot h</math></p> <p>Volume do cone: <math>V = \frac{1}{3} \pi R^2 h</math></p> <p>Volume da esfera: <math>V = \frac{4}{3} \pi R^3</math></p>
Progressões	<p>Progressão Geométrica (P. G.):</p> $a_n = a_1 q^{n-1}$ $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$	
Álgebra	<p>Números complexos:</p> $[\rho(\operatorname{cos}\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = \rho^n [\operatorname{cos}(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$	<p>Relações de Girard: sendo <math>b_1, b_2, \dots, b_n</math> as raízes do polinômio <math>a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0</math>, <math>a_n \neq 0</math>.</p> $\frac{a_{n-1}}{a_n} = -(b_1 + b_2 + \dots + b_n),$ $\frac{a_{n-2}}{a_n} = b_1 b_2 + b_1 b_3 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_2 b_n + \dots + b_{n-1} b_n,$ $\frac{a_1}{a_n} = (-1)^{n-1} (b_1 b_2 \dots b_{n-1} + b_1 b_2 \dots b_{n-2} b_n + \dots + b_2 b_3 \dots b_n),$ $\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n.$