Prova 3 – Matemática

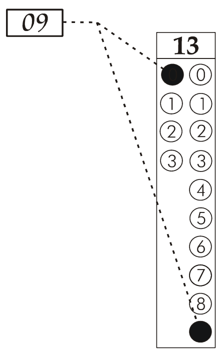
QUESTÕES OBJETIVAS

Nº DE ORDEM: **Nº DE INSCRIÇÃO:**

NOME DO CANDIDATO:

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

1. Confira os campos Nº DE ORDEM, Nº DE INSCRIÇÃO e NOME, conforme o que consta na etiqueta fixada em sua carteira.
2. Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante na etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
3. **É proibido folhear o Caderno de Provas antes do sinal, às 9 horas**.
4. Após o sinal, confira se este caderno contém 20 questões objetivas e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
5. O tempo mínimo de permanência na sala é de 2 horas e 30 minutos após o início da resolução da prova.
6. No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluso o de preenchimento da Folha de Respostas.
7. Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta correta será a soma dos números associados às alternativas corretas. Para cada questão, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme o exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma das alternativas 01 e 08).
8. Se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas, constante abaixo, e destaque-o, para retirá-lo hoje, nesta sala, no horário das 13h15min às 13h30min, mediante apresentação do documento original de identificação do candidato. Após esse período, não haverá devolução.
9. Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas e o Rascunho para Anotação das Respostas.



Corte na linha pontilhada.

RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS – PROVA 3 – INVERNO 2013

Nº DE ORDEM: **NOME:**

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

UEM – Comissão Central do Vestibular Unificado

GABARITO 3

MATEMÁTICA

Questão 01

Assinale o que for **correto**.

01) $15^3 = 10^3 + 5^3$.

02) $\dfrac{125}{31} > \sqrt{16}$.

04) $\left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{7}\right) \cdot \dfrac{7}{8} - \dfrac{1}{40} = \dfrac{1}{4}$.

08) $\log_3 9 + \log_9 18 = \log_3 18$.

16) $\left|\dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{1}{8}}\right| < \dfrac{1}{4}$.

Questão 02

Uma ampulheta é formada por dois cones, C_1 e C_2, retos, congruentes, dispostos sob um mesmo eixo e unidos pelo vértice. A ampulheta é apoiada sob uma mesa com o cone C_1 na posição inferior e com sua base paralela ao chão. Suponha que C_1 está completamente cheio de água e que, ao virar a ampulheta, a água escorre para o cone C_2 com velocidade constante. O tempo necessário para que toda a água escorra é 2 minutos. Com respeito a essa situação, assinale o que for **correto**.

01) Depois de 1 minuto, o nível de água em cada um dos cones será a metade da altura do cone.

02) Entre 0 e 2 minutos, a velocidade com que o nível de água no cone C_2 aumenta é crescente.

04) O tempo necessário para que o nível de água no cone C_2 seja maior do que o nível de água no cone C_1 é superior a 1 minuto e 30 segundos.

08) A área da superfície lateral da ampulheta que está em contato com a água é constante.

16) O nível de água no cone C_1 é inversamente proporcional ao nível de água no cone C_2.

Rascunho

Questão 03

Considere um retângulo $ABCD$ de lados $AB = 6\text{ cm}$ e $BC = 3\text{ cm}$. Sobre o lado AB, marque o ponto E, tal que $AE = 4\text{ cm}$, e, sobre o lado BC, marque o ponto F, tal que $BF = 1\text{ cm}$. Denote por G o ponto de interseção dos segmentos AF e CE. Sobre a figura descrita acima, é **correto** afirmar que

01) os pontos B, G e D são colineares.
02) os triângulos AGE e CFG têm a mesma área.
04) os triângulos GCD e GEB são semelhantes.
08) a área do quadrilátero $AGCD$ é o triplo da área do quadrilátero $FGEB$.
16) os triângulos AGE e CFG são semelhantes.

Questão 04

Considere ABC um triângulo retângulo em B e no qual o ângulo $B\widehat{C}A$ mede 60º. Considere ainda D sobre o segmento AB de modo que CD é bissetriz de $B\widehat{C}A$. A respeito do exposto, assinale o que for **correto**.

01) O segmento AB mede o triplo do comprimento do segmento BD.
02) O ângulo $C\widehat{D}B$ mede 45º.
04) O segmento AC mede o dobro do comprimento do segmento BC.
08) O triângulo ADC é escaleno.
16) A medida, em radianos, do ângulo $C\widehat{D}A$ é $\frac{2\pi}{3}$.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 05

Uma padaria produz bolos de três tipos. Para fazer 1 kg de cada um dos bolos, são necessários açúcar, farinha e ovos nas quantidades apresentadas na Tabela *A* abaixo. Na Tabela *B*, é apresentado o preço desses ingredientes.

	Açúcar	Farinha	Ovos
Bolo 1	0,2 kg	0,5 kg	2
Bolo 2	0,1 kg	0,7 kg	1
Bolo 3	0,4 kg	0,3 kg	4

Tabela *A*: Quantidade de ingredientes para fazer 1kg de bolo.

	Preço
Açúcar	R$ 3,00 por quilo
Farinha	R$ 2,00 por quilo
Ovos	R$ 0,50 por unidade

Tabela *B*: Preço dos ingredientes.

Seja A a matriz de tamanho 3x3 cujas entradas são as quantidades apresentadas na Tabela *A*, e B a matriz de tamanho 3x1 cujas entradas são os valores apresentados na Tabela *B*. Com relação a essas informações, assinale o que for **correto**.

01) O gasto com açúcar, farinha e ovos para fazer o bolo do tipo 1 é maior do que nos demais.
02) O produto $A.B$ é uma matriz cujas entradas representam o custo de cada ingrediente para a produção de 1 kg de cada tipo de bolo.
04) Se a matriz $X = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ representa a quantidade de quilos de cada tipo de bolo produzido, então o produto $X.A$ é uma matriz que representa a quantidade de cada ingrediente que foi utilizado.
08) É impossível fazer os três tipos de bolos com exatamente três quilos de açúcar, dois quilos de farinha e uma dúzia de ovos.
16) O determinante da matriz A é não nulo.

Questão 06

Acerca das funções com domínio e contradomínio reais, f e g, dadas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x+3}$, assinale o que for **correto**.

01) Para todo real negativo a, $f(a) < g(a)$.
02) A função g está definida para todo x real.
04) A função f é sobrejetora.
08) A função f é crescente em todo seu domínio.
16) A imagem de g está contida no intervalo $]-\infty, 1[$ da reta real.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 07

Um número complexo $a+ib$ pode ser identificado no plano cartesiano através do ponto com coordenadas (a,b). Fixe um número natural $n \geq 3$ e, para cada número natural *k*, defina o número complexo

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi \cdot k}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot k}{n}\right).$$

Acerca desses números complexos e de sua representação no plano, assinale o que for **correto**.

01) Para todo número natural $k \geq 1$, o número complexo z_k é k vezes o número complexo z_1, isto é, $z_k = k \cdot z_1$.

02) Para todo número natural *k*, o número complexo z_k é raiz da equação $z^n - 1 = 0$.

04) O número complexo z_n é representado no plano pelo ponto com coordenadas $(1,0)$.

08) Para todo número natural *k*, o número complexo z_k pertence a uma circunferência de raio 1.

16) A área do polígono com vértices $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$ é $\frac{n}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Questão 08

Em uma cantina, os clientes pagam suas compras em dinheiro, e a cantina tem um lucro igual a 20% do valor das vendas. A fim de aumentar as vendas, a cantina decide contratar um serviço bancário que permite a seus clientes fazerem o pagamento com cartões bancários no mesmo preço que pagariam em dinheiro. Por esse serviço, a cantina deve pagar ao banco R$ 50,00 por mês pelo aluguel da máquina de cartões e mais 2% do valor das vendas pagas com cartão. Sobre o exposto, assinale o que for **correto**.

01) Se a cantina vender somente R$ 250,00 no mês com pagamento no cartão, então ela terá prejuízo.

02) Para uma venda no valor de R$ 12,00 paga em dinheiro, a cantina lucra apenas R$ 2,00.

04) Se *x* representa o valor das vendas da cantina que foram pagas em dinheiro, então o lucro L_d referente a essas vendas é dado pela função $L_d(x) = 0,2x$.

08) O lucro mensal obtido pela cantina ao vender R$ 10.000,00 com pagamento no cartão é menor do que o lucro obtido ao vender R$ 8.000,00 com pagamento em dinheiro.

16) Se *y* representa o valor mensal das vendas da cantina que foram pagas com cartão, então o lucro mensal L_c referente a essas vendas é dado pela função $L_c(y) = 0,22y - 50$.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 09

Em um triângulo ABC, o lado AB mede 6 cm, e o lado BC mede 8 cm. Sabendo ainda que a circunferência λ_1 com centro A e raio AB intercepta o segmento AC em $D \neq C$, e a circunferência λ_2 de centro C e raio BC intercepta o segmento AC em $E \neq A$, assinale o que for **correto**.

01) A área desse triângulo não pode ser superior a 24 cm^2.
02) O lado AC é o maior dos lados em qualquer triângulo com as propriedades descritas.
04) Em qualquer triângulo, tal como descrito, o segmento DE mede 4 cm.
08) Se o lado AC mede 10 cm, a circunferência λ_1 é tangente ao segmento BC.
16) O perímetro de ABC deve ser inferior a 28 cm.

Questão 10

Considerando $b \geq 2$ um número natural, podem-se representar frações da unidade no sistema numérico de base b somando múltiplos de potências de b com expoentes negativos. Por exemplo,

$$[0, a_1 a_2 a_3]_b = a_1 \cdot b^{-1} + a_2 \cdot b^{-2} + a_3 \cdot b^{-3},$$

em que cada a_i é um número inteiro com $0 \leq a_i \leq b-1$. As representações com infinitos dígitos correspondem a somas infinitas. Por exemplo,

$$[0, a_1 a_2 a_3 \ldots]_b = a_1 \cdot b^{-1} + a_2 \cdot b^{-2} + a_3 \cdot b^{-3} + \cdots.$$

Com relação ao exposto, assinale o que for **correto**.

01) $[0,12]_3 = \dfrac{3}{25}$.
02) $[0,222...]_5 = \dfrac{1}{2}$.
04) Se c for um número natural maior do que b, então $[0, a_1 a_2 a_3]_b < [0, a_1 a_2 a_3]_c$.
08) Na base 6, a fração $\dfrac{1}{3}$ possui uma representação finita.
16) Na base 2, a fração $\dfrac{1}{3}$ possui uma representação finita.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 11

Pedro e Tiago brincam de cara ou coroa usando uma moeda não viciada. Se saírem quatro caras (não necessariamente consecutivas) antes de saírem quatro coroas, Pedro vence; caso contrário, vence Tiago. Considerando que os lançamentos são eventos independentes, assinale o que for **correto**.

01) São necessários, no máximo, sete lançamentos para se determinar o vencedor.
02) A probabilidade de o jogo acabar após os quatro primeiros lançamentos é de 1/8.
04) Se, nos dois primeiros lançamentos, saiu “cara”, a probabilidade de Pedro ser o vencedor é de 1/4.
08) Se, nos três primeiros lançamentos, saiu “cara”, a probabilidade de sair “cara” no quarto lançamento é menor do que a de sair “coroa”.
16) A probabilidade de o jogo terminar antes do sétimo lançamento é superior a 1/2.

Questão 12

Uma partícula se move no plano cartesiano e, em cada instante t (em segundos), sua posição é dada pelas coordenadas $P_t = \left(\mathrm{sen}(2\pi t),\ \mathrm{sen}^2(\pi t)\right)$. Com respeito ao movimento dessa partícula, assinale o que for **correto**.

01) A partícula se move apenas no primeiro quadrante.
02) A partícula se move no interior de um círculo de raio $\sqrt{2}$.
04) A partícula passa pelo ponto $(0,0)$ duas vezes em menos de um segundo.
08) A partícula cruza a reta de equação $2y = x$ mais de uma vez a cada segundo.
16) A partícula descreve uma trajetória elíptica de equação $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 13

Considerando A o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que satisfazem a equação $2x-4y=0$, B o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que satisfazem a equação $x^2+y^2=1$ e C o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que satisfazem a equação $x-y^2=0$, assinale o que for **correto**.

01) B corresponde a uma circunferência, e C corresponde a uma parábola.
02) A e B não possuem pontos em comum.
04) B e C não possuem pontos em comum.
08) Os pontos de A também satisfazem a equação $x-2y=1$.
16) A e C possuem dois pontos em comum.

Questão 14

Acerca da inequação $x^2+4x+c\leq 0$ e de suas soluções reais, assinale o que for **correto**.

01) Para qualquer número inteiro c, o polinômio no primeiro membro da inequação pode ser decomposto no produto de dois polinômios de grau 1 e de coeficientes reais.
02) Existem dois valores distintos reais de c para os quais a inequação possui uma única solução.
04) Para $c=4$, o conjunto-solução da inequação possui um único elemento.
08) Considere t_1 e t_2 números reais, com $t_1<t_2$, que satisfazem a inequação quando $c=0$. Se $t_1\leq t\leq t_2$, então t também satisfaz a inequação quando $c=0$.
16) Se t é um número real que satisfaz a inequação para $c=1$, então $-4-t$ também satisfaz a inequação.

Questão 15

Considere as funções f e g, tendo como domínio e contradomínio o conjunto dos números reais, para as quais se tem $f(3)=1$, $f(4)=7$, $g(3)=-8$, $g(4)=7$ e $g(5)=3$. Assinale o que for **correto**.

01) $(f+g)(3)=-f(4)$.
02) $(f\cdot g)(4)=7$.
04) $(f\circ g)(5)=3$.
08) Se g possui inversa, então $g^{-1}(f(4))=4$.
16) Se f é uma função afim, sua expressão deve ser $f(x)=6x-17$.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 16

Considerando as funções reais *f*, *g* e *h*, dadas por $f(x)=\cos x$, $g(x)=\ln x$ e $h(x)=x^2+1$, é **correto** afirmar que

01) $(h\circ f)(x)=2-\operatorname{sen}^2 x$.
02) a função $h\circ g$ está definida para todo *x* real.
04) a função $f\circ g$ assume um máximo em $x=1$.
08) a função $g\circ h$ assume um mínimo em $x=0$.
16) $(g\circ f)(x)\le 0$ para todo *x* no seu domínio.

Questão 17

Considere $a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n,\ldots$ uma progressão geométrica infinita de números reais na qual $a_1=1$ e a razão é $\frac{1}{2}$. Assinale o que for **correto**.

01) Existem termos negativos na sequência.
02) Os três primeiros termos da sequência formam uma progressão aritmética.
04) $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}>2$.
08) Todos os termos da sequência são números racionais.
16) $a_3=\frac{1}{4}$.

Rascunho

Questão 18

Seja $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio de grau 4 com as seguintes propriedades:

i. os coeficientes *a*, *b*, *c* e *d* são números inteiros;

ii. as raízes de $P(x)$ são números inteiros que, quando colocadas em ordem crescente, formam uma progressão aritmética de razão $r > 0$.

Nessas condições, assinale o que for **correto**.

01) Se a soma das raízes é igual a zero, então o coeficiente *a* é igual a zero.

02) Se a menor raiz de $P(x)$ é igual à razão *r*, então o coeficiente *d* é múltiplo de 24.

04) Se a menor raiz de $P(x)$ é igual à razão *r*, então o coeficiente *c* é múltiplo de 50.

08) O polinômio $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$ goza das propriedades i e ii.

16) O coeficiente *b* tem a mesma paridade da razão *r*, isto é, ambos são pares ou ambos são ímpares.

Questão 19

Considerando um cubo cuja aresta mede 2 cm e que está inscrito em uma esfera (isto é, os vértices do cubo pertencem à esfera), assinale o que for **correto**.

01) O volume do cubo é 8 cm^3.

02) O raio da esfera é $\sqrt{3}$ cm.

04) A área total do cubo é 12 cm^2.

08) São doze os pontos comuns ao cubo e à esfera.

16) O cubo ocupa mais da metade do volume da esfera.

Questão 20

Seja P_{ext} um polígono circunscrito a uma circunferência λ e P_{int} o polígono inscrito em λ cujos vértices são os pontos onde P_{ext} tangencia λ. Sobre essa situação, assinale o que for **correto**.

01) Se P_{ext} é um triângulo isósceles, então P_{int} também é um triângulo isósceles.

02) Se P_{ext} é um triângulo retângulo, então P_{int} também é um triângulo retângulo.

04) Se P_{ext} é um quadrado, então P_{int} também é um quadrado.

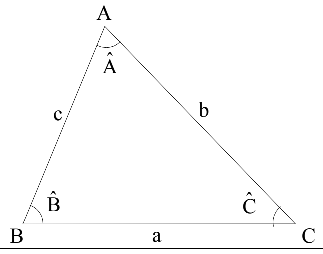
08) Se P_{ext} é um paralelogramo, então P_{int} é um retângulo.

16) Se P_{ext} é um quadrilátero, então as diagonais de P_{int} são diâmetros de λ.

Rascunho

GABARITO 3

MATEMÁTICA – Formulário

Trigonometria	$(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = 1$	 *Lei dos cossenos:* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos(\hat{A})$
Geometria Plana e Espacial	Comprimento da circunferência: $C = 2\pi R$ Área do triângulo: $A = \frac{bh}{2}$ Área do retângulo: $A = bh$ Área lateral do cone: $A = \pi Rg$	Volume do prisma: $V = B \cdot h$ Volume do cone: $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$ Volume da esfera: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
Progressões	Progressão Geométrica (P. G.): $a_n = a_1 q^{n-1}$ $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$	
Álgebra	Números complexos: $[\rho(\cos\theta + i \,\text{sen}\theta)]^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)]$	Relações de Girard: sendo $b_1, b_2, \ldots, b_n$ as raízes do polinômio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$. $\frac{a_{n-1}}{a_n} = -(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$, $\frac{a_{n-2}}{a_n} = b_1b_2 + b_1b_3 + \ldots + b_1b_n + b_2b_3 + \ldots + b_2b_n + \ldots + b_{n-1}b_n$, $\frac{a_1}{a_n} = (-1)^{n-1}(b_1b_2\ldots b_{n-1} + b_1b_2\ldots b_{n-2}b_n + \ldots + b_2b_3\ldots b_n)$, $\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n b_1b_2\ldots b_{n-1}b_n$.

GABARITO 3