VESTIBULAR
UEM INVERNO 2012

Prova 3 – Matemática

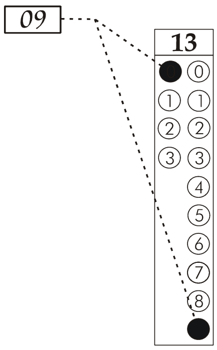
QUESTÕES OBJETIVAS

N.º DE ORDEM: **N.º DE INSCRIÇÃO:**

NOME DO CANDIDATO:

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

1. Confira os campos N.º DE ORDEM, N.º DE INSCRIÇÃO e NOME, conforme o que consta na etiqueta fixada em sua carteira.
2. Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante na etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
3. **É proibido folhear o Caderno de Provas antes do sinal, às 9 horas**.
4. Após o sinal, confira se este caderno contém 20 questões objetivas e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
5. O tempo mínimo de permanência na sala é de 2 horas após o início da resolução da prova.
6. No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluído o de preenchimento da Folha de Respostas.
7. Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta correta será a soma dos números associados às alternativas corretas. Para cada questão, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma das alternativas 01 e 08).
8. Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas e o Rascunho para Anotação das Respostas.
9. Se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas constante abaixo e destaque-o, para retirá-lo hoje, nesta sala, no horário das 13h15min às 13h30min, mediante apresentação do documento de identificação do candidato. Após esse período, não haverá devolução.



Corte na linha pontilhada.

RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS – PROVA 3 – INVERNO 2012

N.º DE ORDEM: **NOME:**

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

UEM – Comissão Central do Vestibular Unificado

GABARITO 3

MATEMÁTICA

Questão 01

Considere a seguinte função polinomial $p(x) = x^4 - 3x^2 - 4$. Assinale o que for **correto**.

01) Nenhum zero da função é real.
02) Geometricamente, os zeros da função são vértices de um quadrado no plano complexo.
04) Um zero da função é $z = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2})$.
08) A função possui dois zeros reais e dois zeros imaginários.
16) O resto da divisão de $p(x)$ por $x^2 + 1$ é zero.

Questão 02

Considere um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas xOy e três retas com equações $r_1 : 2x - 2y + 2 = 0;$ $r_2 : y - x - 2 = 0$ e $r_3 : x - 1 = 0.$ Sejam A o ponto de interseção de r_1 e r_3, e B o ponto de interseção de r_2 e r_3, assinale o que for **correto**.

01) A área do triângulo ABO é $\frac{1}{2}$ u.a.
02) As retas r_1 e r_2 são perpendiculares.
04) A reta r_3 é perpendicular ao eixo Ox.
08) O ângulo formado pelas retas r_1 e r_3 mede 60°.
16) A distância entre as retas r_1 e r_2 é 1 u.c.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 03

Alguns tipos de embalagens de bolas de tênis têm a forma de um cilindro, onde as bolas são colocadas uma sobre a outra. Considere uma embalagem contendo 4 bolas de tênis, cada bola com diâmetro de $6,4$ cm, e suponha que a embalagem fechada seja um cilindro circular reto com diâmetro da base igual ao das bolas e cuja altura seja a soma dos diâmetros das 4 bolas. Desprezando as espessuras das bolas e da embalagem, bem como quaisquer deformações nelas, e considerando $\pi = 3$, assinale o que for **correto**.

01) O volume da embalagem é menor do que $800\,\text{cm}^3$.
02) Cada bola ocupa um espaço com volume menor do que $130\,\text{cm}^3$.
04) A área de superfície de cada uma das bolas é menor do que $120\,\text{cm}^2$.
08) O volume do espaço livre, entre as bolas e a embalagem, é menor do que $280\,\text{cm}^3$.
16) A área lateral da embalagem é maior do que $520\,\text{cm}^2$.

Questão 04

A respeito dos subconjuntos do plano de Argand-Gauss:

$X = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$,

$Y = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \overline{z} = 2\}$,

$Z = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + \left(\overline{z}\right)^2 = 2\}$,

é **correto** afirmar que

01) X é finito.
02) $X \subset Y$.
04) $X \cap Z = \varnothing$.
08) Y é uma reta vertical no plano de Argand-Gauss.
16) $Y \cap Z$ possui uma quantidade infinita de elementos.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 05

Considere os dois sistemas de equações lineares

$$A:\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x-y+2z=-3 \\ 3x+y+z=2 \end{cases} \quad \text{e} \quad B:\begin{cases} x+2y-z=5 \\ y-z=3 \\ z=-2 \end{cases}$$

e assinale o que for **correto**.

01) Os sistemas lineares A e B são equivalentes.
02) O sistema linear B não está na forma escalonada.
04) O sistema linear A é possível e indeterminado.
08) O sistema linear B é impossível.
16) O conjunto solução do sistema B está contido no conjunto solução do sistema A.

Questão 06

Considerando *ABCD* um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência de centro *O*, assinale o que for **correto**.

01) Se *ABCD* é um paralelogramo, então necessariamente trata-se de um retângulo.
02) Se os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ medem, respectivamente, 75^o e 120^o, os demais ângulos internos de *ABCD* são agudos.
04) Se o raio da circunferência mede 2 cm e *ABCD* é um quadrado, a área do mesmo é 8 cm^2.
08) Se o centro da circunferência pertence à diagonal *BD*, o ângulo $B\hat{C}D$ é reto.
16) Se a diagonal *BD* possui o mesmo comprimento do raio da circunferência, um dentre os ângulos $B\hat{C}D$ e $B\hat{A}D$ mede 150^o.

Rascunho

Questão 07

No primeiro dia de aula, uma professora de Inglês do Ensino Médio entregou um questionário para avaliar o conhecimento prévio dos 40 alunos. A primeira questão era “quantos anos você cursou inglês fora da escola?”. A resposta de todos os alunos (meninos e meninas) foi um número inteiro não negativo estritamente menor do que 5. Sete alunos responderam “zero”, catorze alunos responderam “um”, dez alunos responderam “dois”, oito alunos responderam “três” e apenas um aluno respondeu “quatro”. Além disso, das vinte meninas que há na sala, treze cursaram pelo menos dois anos de inglês fora da escola. Considerando essas informações, assinale o que for **correto**.

01) A média de anos de inglês cursados fora da escola, nessa turma, é superior a 1,5.
02) A mediana da amostragem é 2 anos.
04) Escolhendo-se ao acaso um aluno, a probabilidade de se escolher uma menina ou alguém que cursou um ano ou menos de inglês fora da escola é superior a 3/4.
08) Escolhendo-se ao acaso um aluno, a probabilidade de se escolher um menino que tenha cursado pelo menos dois anos de inglês fora da escola é inferior a 1/8.
16) No caso em que três meninas cursaram exatamente três anos, dez meninas cursaram exatamente dois anos e as demais não cursaram inglês fora da escola, a média de anos que as meninas da sala cursaram inglês fora da escola é inferior à média dos meninos que cursaram inglês fora da escola.

Questão 08

Considere as funções $f(x) = \log(2^{x^2-1})$ e $g(x) = 2x - 1$, e assinale o que for **correto**.

01) O domínio da função f é o conjunto $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\}$.
02) $(f \circ g)(x) = \log(16^{x^2-1})$.
04) A função f é injetora.
08) O valor mínimo de f é $-\log(2)$.
16) Para $x \in [-1,1]$ tem-se $f(x) \leq 0$.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 09

Considere os polinômios $p(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$ e $q(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$. Sabendo que $p(x) = 0$ e $q(x) = 0$ têm como raízes somente números inteiros e que 1 é uma raiz em comum, assinale o que for **correto**.

01) O resto da divisão de $p(x)$ por $q(x)$ é zero.
02) As raízes de $p(x) = 0$, colocadas em ordem crescente, formam uma progressão aritmética.
04) As raízes de $q(x) = 0$, colocadas em ordem crescente, formam uma progressão geométrica.
08) A soma das quatro raízes de $p(x) = 0$ com as três raízes de $q(x) = 0$ é um número negativo.
16) O resto da divisão de $p(x)$ por $x^2 - 1$ é $x - 2$.

Questão 10

Considerando o espaço tridimensional, suponha que r e s sejam retas perpendiculares em um ponto A, e que s seja concorrente com uma reta t em um ponto B diferente de A. Com relação ao exposto, assinale o que for **correto**.

01) Se a reta s é perpendicular à reta t, então a reta r também é perpendicular à reta t.
02) Se a reta t é concorrente com a reta r, então as retas r, s e t são coplanares.
04) Se a reta t é paralela à reta r, então as retas r, s e t estão contidas em um mesmo plano.
08) Se as retas r e t são reversas, então r e t não são ortogonais.
16) Se a reta t é perpendicular ao plano que contém r e s, então a reta r é ortogonal à reta t.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 11

Acerca da função real *f*, definida por $f(x)=\dfrac{x^2-8x+15}{2x^2-4x+5}$, assinale o que for **correto**.

01) $f(0) > f(1)$.
02) A função é positiva no intervalo [0,5] da reta real.
04) Não existe número real *a* para o qual $f(a)=\dfrac{1}{2}$.
08) $f(-1)=\dfrac{24}{11}$.
16) O ponto (2,1) está situado acima do gráfico da função *f*.

Questão 12

Considere as seguintes propriedades para matrizes do tipo 2×2: (i) $A^2 = A$; (ii) $B^2 = I$, em que I é a matriz identidade, e assinale o que for **correto**.

01) Qualquer matriz que satisfaça a propriedade (i) é invertível.
02) Qualquer matriz que satisfaça a propriedade (ii) é invertível.
04) Se uma matriz satisfaz a propriedade (i), então $\det(A)=1$ ou $\det(A)=0$.
08) Se A satisfaz a propriedade (i), então $A^n = A$ para todo número natural $n \geq 2$.
16) Se B satisfaz a propriedade (ii), então $\det(B)=\pm 1$.

Questão 13

Considere um triângulo *ABC*, no qual os lados *AB* e *AC* possuem o mesmo comprimento, a bissetriz do ângulo $B\hat{C}A$ intercepta *AB* em *P*, e o comprimento de *AP* é igual ao comprimento de *CP*. Assinale o que for **correto**.

01) O ângulo $B\hat{A}C$ mede 36º.
02) O segmento *CP*, além de ser bissetriz de $B\hat{C}A$, é mediana com relação ao lado *AB*.
04) Os triângulos *BPC* e *BCA* são semelhantes.
08) Os triângulos *BPC* e *APC* são congruentes.
16) O triângulo *BPC* é isósceles.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 14

Uma indústria de celulose adquiriu uma área de 1.000 hectares com eucaliptos prontos para serem cortados. No primeiro mês, a indústria cortou 10 hectares; no mês seguinte, cortará 15 hectares, e assim sucessivamente, aumentando em 5 hectares a área cortada no mês anterior, até chegar à capacidade máxima de corte, que é de 50 hectares. A partir daí a indústria manterá o corte mensal em 50 hectares. Além disso, essa indústria quer formar uma área de reflorestamento com árvores nativas da região. Por isso, a cada mês uma área proporcional a 10% da área cortada é reservada para o reflorestamento.

Com relação ao exposto, assinale o que for **correto**.

01) Em 15 meses, a indústria conseguirá uma área para reflorestamento correspondente a mais de 5% da área total.
02) A sequência numérica formada pela quantidade de hectares cortados a cada mês, até chegar à capacidade máxima de corte, forma uma progressão geométrica.
04) Nos 12 primeiros meses, a indústria terá cortado 420 hectares de eucalipto.
08) A indústria atingirá capacidade máxima de corte no nono mês.
16) Em 23 meses, a indústria conseguirá cortar todos os 1.000 hectares de eucalipto.

Questão 15

Pedro possui 180 músicas armazenadas, das quais 80 são do gênero pagode, 60 do gênero sertanejo e as restantes, de rock. Ele sempre as escuta no modo *shuffle*, em que as músicas são executadas em ordem aleatória, sem repetição das que já foram executadas. Levando em conta esses dados, assinale o que for **correto**.

01) Considerando-se apenas as três primeiras músicas executadas, não sendo duas delas de um mesmo gênero, o número de maneiras de escolhê-las, levando-se em conta a ordem de execução, é exatamente $80 \times 60 \times 40$.
02) Se as primeiras duas músicas executadas são do gênero sertanejo, a probabilidade de que a próxima também seja é de 1/58.
04) Se a duração total das músicas de Pedro é de 10 horas e meia, a duração média de cada uma é superior a 3 minutos.
08) Considerando o total de músicas dos três gêneros, o menor número de músicas que preserva a proporção entre os gêneros musicais é 9.
16) O número mínimo de músicas que Pedro deve ouvir para ter certeza de que ouvirá uma de cada gênero é 81.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 16

Assinale o que for **correto**.

01) $2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

02) $\frac{3}{2}>\sqrt{2}$.

04) $\frac{1}{90}=0,01010101...$

08) $\frac{15}{4}$, $\frac{7}{3}$ e $\sqrt[3]{80}$ pertencem ao intervalo real $[2,4]$.

16) A multiplicação de quaisquer dois números irracionais resulta sempre em um número irracional.

Questão 17

Considere um prisma reto cuja base é um pentágono não regular $ABCDE$, em que os lados AB e EA medem $10\sqrt{2}$ cm, o lado CD mede 20 cm e os lados BC e DE são perpendiculares ao lado CD e têm metade da sua medida. Sabendo que a altura desse prisma é de 10 cm, assinale o que for **correto**.

01) A área lateral desse prisma mede $600\sqrt{2}$ cm^2.

02) O volume do prisma é 3.000 cm^3.

04) O prisma tem 7 faces retangulares.

08) A área total do prisma é 1.200 cm^2.

16) O prisma tem 10 vértices.

Questão 18

Considere uma circunferência com centro $O(0,0)$ e raio 2, e três pontos A, B e C sobre esta circunferência, sendo A um ponto do primeiro quadrante e que dista 1 do eixo Oy, B o ponto diametralmente oposto a A, e C um ponto que dista 2 do ponto A. Assinale o que for **correto**.

01) O ponto C está no segundo quadrante ou está sobre o eixo Ox.

02) A área do setor circular definido pelo menor arco AC é $\frac{1}{6}$ da área delimitada pela circunferência.

04) A área do triângulo AOC é 2 u.a.

08) A distância entre os pontos B e C é $2\sqrt{3}$ u.c.

16) O triângulo ABC é um triângulo retângulo.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 19

Assinale o que for **correto**.

01) Um ângulo que mede 2 radianos é agudo.
02) Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\text{sen}\left(\text{sen}\,x\right)$ para todo x real; então $g(x)<\frac{\sqrt{3}}{2}$, para todo x real.
04) Para todo x real, $(\text{sen}\,x)^2\leq\left|\text{sen}\,x\right|$.
08) Para todo x real, $\cos(2x)=1-2(\text{sen}\,x)^2$.
16) Um triângulo é obtusângulo se, e somente se, o quadrado do lado maior é superior à soma dos quadrados dos lados menores.

Questão 20

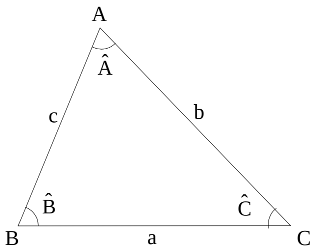
Acerca dos lugares geométricos do plano cartesiano dados pelas equações $x^2+y^2=1$ e $x^2-y^2=1$, assinale o que for **correto**.

01) A primeira equação representa uma parábola.
02) A segunda equação representa uma hipérbole.
04) Os pontos de interseção dessas curvas pertencem ao eixo das ordenadas.
08) Os focos da cônica dada pela equação $x^2-y^2=1$ pertencem ao eixo das abscissas.
16) A reta de equação $x-y+\sqrt{2}=0$ tangencia a curva dada por $x^2+y^2=1$.

Rascunho

GABARITO 3

MATEMÁTICA – Formulário

Trigonometria	$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \text{sen}(x)\text{sen}(y)$ $(\text{sen}\, x)^2 + (\cos x)^2 = 1$	 *Lei dos cossenos:* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos(\hat{A})$
Geometria Plana e Espacial	Comprimento da circunferência: $C = 2\pi R$ Área do triângulo: $A = \dfrac{bh}{2}$ Área do retângulo: $A = bh$ Área do círculo: $A = \pi R^2$ Área lateral do cilindro: $A = 2\pi Rh$ Área do setor circular: $A = \dfrac{R^2\alpha}{2}$ Área da superfície esférica: $A = 4\pi R^2$	Volume do prisma: $V = B \cdot h$ Volume do cilindro: $V = \pi R^2 h$ Volume da esfera: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$
Progressões	Progressão Aritmética (P. A.): $a_n = a_1 + (n-1)r$ $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$	
Geometria Analítica	Área do triângulo de vértices $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ e $R(x_3, y_3)$: $A = \dfrac{1}{2}\lvert D \rvert$, onde $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$	Distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $r: ax + by + c = 0$: $d_{P,r} = \left\lvert \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\rvert$