VESTIBULAR UEM - Verão 2011

Prova 3 – Matemática

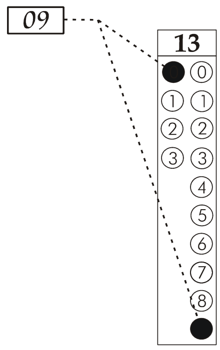
QUESTÕES OBJETIVAS

N.º DE ORDEM: **N.º DE INSCRIÇÃO:**

NOME DO CANDIDATO:

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

1. Confira os campos N.º DE ORDEM, N.º DE INSCRIÇÃO e NOME, conforme o que consta na etiqueta fixada em sua carteira.
2. Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante na etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
3. **É proibido folhear o Caderno de Provas antes do sinal, às 9 horas**.
4. Após o sinal, confira se este caderno contém 20 questões objetivas e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
5. O tempo mínimo de permanência na sala é de 2 horas após o início da resolução da prova.
6. No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluído o de preenchimento da Folha de Respostas.
7. Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta correta será a soma dos números associados às proposições verdadeiras. Para cada questão, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma das proposições 01 e 08).
8. Se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas constante nesta prova e destaque-o, para retirá-lo hoje, nesta sala, no horário das 13h15min às 13h30min, mediante apresentação do documento de identificação do candidato. Após esse período, não haverá devolução.
9. Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas e o Rascunho para Anotação das Respostas.



Corte na linha pontilhada.

RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS – PROVA 3 – VERÃO 2011

N.º DE ORDEM: **NOME:**

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

UEM – Comissão Central do Vestibular Unificado

GABARITO 1

MATEMÁTICA

Rascunho

Questão 01

Um número natural é chamado quadrado perfeito, se ele for o quadrado de algum número natural. Sabendo disso, assinale o que for **correto**.

01) Existem quadrados perfeitos cuja diferença é 730.
02) Todo quadrado perfeito que é múltiplo de 7 é múltiplo de 49.
04) A multiplicação de um quadrado perfeito por outro quadrado perfeito é sempre um quadrado perfeito.
08) O resultado da soma de quadrados perfeitos é sempre um quadrado perfeito
16) 1025710 é um quadrado perfeito.

Questão 02

Em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas xOy, considere três retas: r_1 a reta que contém os pontos $(2,0)$ e $(0,2)$; r_2 dada por sua equação na forma segmentária $\frac{x}{4}-\frac{y}{4}=1$; e $r_3: \alpha x+y-4=0$, em que α é algum número real. Em relação ao exposto, assinale o que for **correto**.

01) Se $\alpha=\frac{8}{3}$, então as três retas se interceptam em um mesmo ponto.
02) As retas r_1 e r_2 são perpendiculares.
04) Se $\alpha=3$, então a área do triângulo formado pelas intersecções das retas, duas a duas, é $2\,u.a.$.
08) Não existe número real α de modo que as retas r_2 e r_3 sejam paralelas.
16) Para $\alpha=2$, o ângulo agudo entre as retas r_2 e r_3 é de $75°$.

GABARITO 1

Questão 03

Uma pirâmide $ABCDE$ possui base quadrada $ABCD$ e o vértice E é equidistante dos demais vértices. Seja O a interseção das diagonais do quadrado $ABCD$, assinale o que for **correto**.

01) Todas as faces triangulares dessa pirâmide são triângulos isósceles.
02) Se o comprimento do segmento OE é igual ao comprimento do segmento OA, todas as arestas da pirâmide possuem o mesmo comprimento.
04) Se o comprimento de OE é $\frac{\sqrt{15}}{2}$ vezes o comprimento do lado do quadrado $ABCD$, a área da face triangular ABE é maior do que a área de $ABCD$.
08) Se dobrar-se a medida do lado do quadrado e reduzir-se pela metade a medida da altura relativa à base quadrada, o volume da pirâmide permanecerá constante.
16) Se o volume da pirâmide, em centímetros cúbicos, é numericamente igual à área do quadrado $ABCD$, em centímetros quadrados, a altura da pirâmide é 3 cm.

Questão 04

Sobre uma circunferência com raio de 6 cm, marcam-se os pontos A, B e C, equidistantes entre si, e um ponto D diferente dos anteriores. Sobre essa situação, é **correto** afirmar que

01) a área do triângulo ABC supera metade da área do círculo delimitado pela circunferência na qual ele está inscrito.
02) o triângulo ABD possui, necessariamente, área menor do que a do triângulo ABC.
04) o triângulo ABC é isósceles.
08) se o triângulo ABD é isósceles seu maior lado é o lado AB.
16) a área da circunferência é menor do que $100\ cm^2$.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 05

Considerando o seguinte polinômio $p(x) = (ax^2 + x + 2)(bx + c)$, em que a, b, c são números reais e $b \neq 0$ em relação à equação polinomial $p(x) = 0$, assinale o que for **correto**.

01) Se $c = 0$ e $a > \frac{1}{8}$, então a equação tem duas raízes não reais.
02) A equação tem pelo menos uma raiz real.
04) Se $a \leq 0$, então a equação terá todas as raízes reais.
08) Se $a = b = 1$, então as raízes da equação são: $x_1 = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}$, $x_2 = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}$ e $x_3 = -c$.
16) Se $a = b = c = -1$, então a equação terá três raízes distintas.

Questão 06

Uma empresa embala quatro tipos de produtos: A, B, C e D. Cada um desses produtos tem um prazo de validade diferente do outro, obedecendo às seguintes relações: o produto B tem um prazo de validade $\frac{1}{3}$ maior que o prazo de validade do produto C; o prazo de validade do produto D é $\frac{7}{10}$ do prazo de validade do produto A; o prazo de validade do produto C é $\frac{3}{5}$ do prazo de validade do produto A. Entenda-se como prazo de validade o número de dias entre a data na qual o produto foi embalado e a data máxima para a sua utilização. Com base nessas informações, assinale o que for **correto**.

01) Se o produto C tem prazo de validade de 60 dias, então o prazo de validade do produto A é de 100 dias.
02) O prazo de validade do produto D é menor que o prazo de validade do produto C.
04) O produto A é o que possui maior prazo de validade dentre os quatro produtos.
08) A soma dos prazos de validade dos produtos A e C é maior que soma dos prazos de validade dos produtos B e D.
16) Se o produto B tem prazo de validade de 80 dias, então o produto D tem prazo de validade de 75 dias.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 07

João e Pedro decidiram treinar para competir na Corrida de São Silvestre, mas cada um está fazendo um treinamento diferente: João está correndo 40 minutos por dia e consegue percorrer uma distância de 6 km em cada dia; já Pedro está correndo 30 minutos por dia, do seguinte modo: no primeiro dia, ele percorreu uma distância de 3 km, no segundo dia percorreu $3{,}5$ km, no terceiro dia percorreu 4 km, assim sucessivamente até o décimo quinto dia, e reinicia o processo percorrendo, novamente 3 km. Com essas informações, assinale o que for **correto.**

01) A sequência numérica formada pelas velocidades médias de Pedro, nos quinze primeiros dias de treinamento, forma uma progressão geométrica.
02) No quarto dia, a velocidade média que Pedro correu foi igual à velocidade média que João correu.
04) No décimo dia, Pedro percorreu a distância de $7{,}5$ km.
08) A distância total percorrida por Pedro, desde o primeiro até o décimo terceiro dia, foi a mesma percorrida por João no mesmo período.
16) A diferença entre as distâncias totais percorridas por Pedro e João, nos quinze primeiros dias de treinamento, é maior que 10 km.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 08

Em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas xOy, considere uma circunferência λ_1 de centro $C(1,1)$ que contém a origem O do sistema de coordenadas e seja A o outro ponto de intersecção de λ_1 com o eixo Oy. Agora, considere um circunferência λ_2 com centro na origem O, cujo raio é o dobro do raio de λ_1 e sejam B e D os pontos de intersecção de λ_2 com o eixo Ox. Considerando que $\pi \cong 3{,}14$ e $\sqrt{2} \cong 1{,}41$ e as informações expostas, assinale o que for **correto**.

01) A área limitada pela circunferência λ_2 é o dobro da área limitada pela circunferência λ_1.
02) As circunferências λ_1 e λ_2 são tangentes no ponto $E(2,2)$.
04) A área do triângulo ABD é maior do que a área limitada pela circunferência λ_1.
08) A equação geral (ou normal) da circunferência λ_1 é $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.
16) As áreas dos triângulos COB e COD são iguais.

Questão 09

Considere as funções f e g, ambas com domínio e contradomínio real, dadas por $f(x) = 5x - \sqrt{2}$ e $g(x) = x^2 - 6x + 1$, para qualquer x real. A respeito dessas funções, assinale o que for **correto**.

01) A imagem de qualquer número racional, pela função f, é um número irracional.
02) A função g possui uma única raiz real.
04) Ambas as funções são crescentes no intervalo $[0,+\infty[$ do domínio.
08) O gráfico da função $f \circ g$ é uma parábola.
16) Ambas as funções possuem inversas.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 10

É cada vez mais comum, em propagandas veiculadas em revistas e outras mídias, o uso de códigos QR. Um código QR é uma espécie de código de barras bidimensional, que é utilizado para armazenar informações diversas. Após codificada, a informação é armazenada sob a forma de um mosaico quadrado quadriculado formado por quadradinhos brancos e pretos, cuja dimensão (número de quadradinhos em cada linha e coluna) depende do tamanho da informação a ser armazenada. Levando-se em consideração as informações fornecidas e supondo que qualquer coloração dos quadrados do mosaico pelas cores preta ou branca forneça um código QR válido, e seus conhecimentos matemáticos, assinale o que for **correto**.

01) É possível construir exatamente 3200 códigos QR de dimensão 40×40 distintos.

02) O número de códigos QR de dimensão 17×17 que possuem os quatro quadradinhos dos quais um vértice é um vértice do mosaico, coloridos com a mesma cor (preta ou branca) corresponde exatamente a 1/8 do total de mosaicos possíveis.

04) Se em um mosaico QR 10×10, 70% dos quadradinhos são brancos e 30% são pretos, a probabilidade de, escolhendo-se ao acaso dois quadradinhos distintos, escolher dois da mesma cor é inferior a 70%.

08) Se as cores dos quadradinhos de dois mosaicos QR 10×10 coincidem em exatamente 40% dos quadradinhos e 60% dos quadradinhos cuja cor coincide em ambos os mosaicos possuem a cor branca, os quadradinhos pretos coincidentes em ambos os mosaicos representam 16% dos quadradinhos de um mosaico.

16) Só é possível construir, no máximo, dois mosaicos distintos, de mesma dimensão, de modo que quaisquer dois quadrados com um lado em comum possuam cores distintas.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 11

Considerando dois números complexos, $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ na forma algébrica e $w = 3(\cos\theta + i sen\theta)$ na forma trigonométrica, onde $0 \le \theta < 2\pi$, assinale o que for **correto**.

01) $\left| z \cdot w \cdot \overline{z} \right| = |w|^3$.

02) Se $\theta = \frac{\pi}{3}$, então $\overline{w} = z$.

04) $z^4 = 27z$.

08) Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, então $\left(\frac{z \cdot \overline{w}}{w} \right)^{10} = z^{10}$.

16) $\left| w^3 \cdot (\overline{z})^3 \cdot (\overline{w})^3 \cdot z^3 \right| = |w|^9 \cdot |z|^9$.

Questão 12

O lucro de uma empresa em um período de 15 meses foi modelado matematicamente por meio da seguinte função $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a variável x indica o mês e $f(x)$ o lucro, em milhões de reais, obtido no mês x. Sabe-se que no início desse período, digamos mês zero, a empresa tinha um lucro de 2 milhões de reais; no primeiro mês, o lucro foi de 3 milhões de reais; e, no décimo quinto mês, o lucro foi de 7 milhões de reais. Com base nessas informações, assinale o que for **correto**.

01) O lucro obtido no décimo quarto mês foi igual ao lucro obtido no oitavo mês.
02) O lucro máximo foi obtido no décimo mês.
04) O lucro máximo obtido foi superior a 7,5 milhões de reais.
08) O lucro da empresa nesse período de 15 meses oscilou de 2 a 7 milhões de reais.
16) O gráfico da função que modela o lucro é uma parábola com concavidade para baixo.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 13

Em um triângulo *ABC*, sejam t a medida do lado *AB*, u a medida do lado *BC*, v a medida do lado *AC*, e seja α a medida do ângulo $A\hat{B}C$, sabendo que $t \leq u \leq v$, assinale o que for **correto**.

01) Se $\dfrac{v}{u} = \dfrac{u}{t}$, então $u < 2t$.

02) A área do triângulo *ABC* é menor ou igual a $\dfrac{ut}{2}$.

04) Se M é o ponto médio do lado *AB*, e os triângulos *AMC* e *BMC* são congruentes, então *ABC* é um triângulo isósceles.

08) Se $\alpha = \pi/3$ rad, então $v^2 = (t+u)^2 + tu$.

16) Se $t + v = 2u$ e *ABC* é acutângulo, então $u < \dfrac{4t}{3}$.

Questão 14

Sabendo que r, s e t são três retas no espaço tridimensional com r e s paralelas distintas, assinale o que for **correto**.

01) Se a reta r é perpendicular a um plano α, então a reta s também é perpendicular ao plano α.

02) Se a reta t é concorrente com a reta s, então t também é concorrente com a reta r.

04) Se um plano β contém a reta s, então o plano β também contém a reta r.

08) Se a reta t é perpendicular à reta r, então t é perpendicular ou ortogonal à reta s.

16) Se as três retas r, s e t são paralelas distintas, então existe um plano α que contém as três retas.

Rascunho

Questão 15

Considere uma sala de aula composta por 48 alunos, sendo 21 meninos e 27 meninas. Na primeira prova de Matemática, 15 alunos da sala tiraram nota menor que 6, sendo 8 meninos, e, na primeira prova de Língua Portuguesa, 12 alunos tiraram nota menor que 6, sendo 6 meninas. Dentre esses que tiraram nota inferior a 6, houve ainda 3 alunos que ficaram com nota menor que 6 em ambas as disciplinas. De acordo com os dados fornecidos, assinale o que for **correto**.

01) A probabilidade de um menino ter tirado nota menor que 6 em ambas as disciplinas é de 25%.
02) Escolhido ao acaso um aluno (menino ou menina), a probabilidade de este ter tirado nota maior ou igual a 6, em ambas as disciplinas, é de 50%.
04) A probabilidade de um menino ter tirado nota maior ou igual a 6 em Matemática é $\frac{13}{21}$.
08) Se os 3 alunos que tiraram nota menor que 6 em ambas as disciplinas são meninos, então a probabilidade de uma menina ter tirado pelo menos uma nota maior ou igual a 6 é de 100%.
16) A probabilidade de uma menina ter tirado nota menor que 6 em Matemática é $\frac{8}{21}$.

Questão 16

Um determinado funil de plástico tem a forma de um tronco de cone cujas circunferências dos furos que o delimitam possuem raios 2 cm e 0,5 cm, e a altura do funil é de 6 cm. Considerando essas informações, e desprezando a espessura do funil, assinale o que for **correto**.

01) O volume (capacidade) do funil é maior do que 30 cm^3.
02) A área lateral do funil é superior a 60 cm^2.
04) Se o funil estiver em posição vertical, com o furo menor voltado para baixo e tampado, para encher o funil até metade da altura com água, serão necessários menos de 10 cm^3 de água.
08) Se o funil foi obtido de um cone, removendo-se sua ponta, a altura do cone original era de 10 cm.
16) A razão entre as áreas respectivas do círculo maior e menor que formam os furos do funil é igual a 8.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 17

Duas matrizes quadradas A e B, de mesma ordem, são semelhantes, se existir uma matriz C, possuindo a mesma ordem de A e B, de determinante não-nulo, tal que $A = C^{-1}BC$. Com relação a matrizes semelhantes, é **correto** afirmar que

01) matrizes com determinantes distintos podem ser semelhantes.
02) a matriz identidade de ordem $n \times n$ só é semelhante a si mesma.
04) se A é semelhante a B, então, necessariamente, A^2 é semelhante a B^2.
08) se $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $C^{-1}BC = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.
16) se A é semelhante a B, então, $2A$ é semelhante a $2B$.

Questão 18

Considere a seguinte função $f(x) = 4^{2x^2 - x - 1}$ cujo domínio é conjunto dos números reais. Com relação a essa função, assinale o que for **correto**.

01) O mínimo da função f ocorre em $x = 0$.
02) O conjunto solução da inequação $f(x) < 1$ é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < 1\}$.
04) Para $x = 0$, tem-se $\log_2 f(x) = -2$.
08) O conjunto solução da inequação $f(x) > 8$ é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1-\sqrt{21}}{4}$ ou $x > \frac{1+\sqrt{21}}{4}\}$.
16) $\log_3 f(1)$ não existe.

Rascunho

Questão 19

Considere uma cidade com população atual de $350\,000$ habitantes dos quais $10\,500$ estão com suspeita de infecção pelo vírus da dengue. Esta cidade foi dividida em três regiões: região A com $80\,000$ habitantes, região B com $130\,000$ habitantes e região C com o restante dos habitantes. Considere, ainda, as seguintes informações: 20% da população da cidade já estiveram infectados pelo vírus da dengue; na região B, o índice de suspeitas de infecção é 10% superior à média da cidade. Baseando-se nessas informações, assinale o que for **correto**.

01) O número de pessoas da região B com suspeita de dengue é de, aproximadamente, 4% da população total da cidade.
02) O número total de casos suspeitos de dengue nas regiões A e C é de $6\,210$.
04) A probabilidade de uma pessoa que já teve dengue estar no grupo dos suspeitos de infecção é menor ou igual a 15%.
08) Se a população da cidade aumenta 2% ao mês e a taxa de suspeitas de infecção permanece inalterada, então, daqui a três meses, o número de pessoas com suspeita de infecção será maior que $12\,000$.
16) Se 15% da população da cidade é de crianças e 15% de pessoas têm mais de 50 anos, a probabilidade de uma pessoa desses dois grupos estar no grupo suspeito de infecção é de 10%.

Questão 20

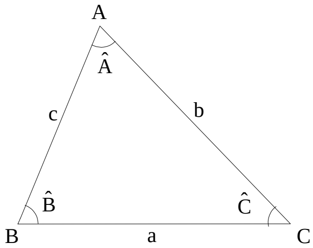
Sejam A, B e C os vértices de um triângulo retângulo, sendo $\hat{A}$ o ângulo reto e AC medindo o triplo de AB. Considererando agora os pontos D e E no segmento AC, de modo que $AD = DE = EC$, e F sendo o ponto médio do segmento BC, assinale o que for **correto**.

01) $\cos(\hat{B}) = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.
02) Os triângulos BDC e FEC são congruentes.
04) $sen(B\hat{D}C) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
08) Os triângulos EDF e BDF são semelhantes.
16) $\cos(E\hat{F}C) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Rascunho

GABARITO 1

MATEMÁTICA – Formulário

Trigonometria	$\text{sen}(x \pm y) = \text{sen}(x)\cos(y) \pm \text{sen}(y)\cos(x)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \text{sen}(x)\text{sen}(y)$ $\text{tg}(x \pm y) = \dfrac{\text{tg}(x) \pm \text{tg}(y)}{1 \mp \text{tg}(x)\text{tg}(y)}$	 *Lei dos senos:* $\dfrac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \dfrac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \dfrac{c}{\text{sen}(\hat{C})}$ *Lei dos cossenos:* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos(\hat{A})$
Análise Combinatória	$P_n = n!$ $A_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$	$C_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, a^{n-i}\, b^i$
Geometria Plana e Espacial	Comprimento da circunferência: $C = 2\pi R$ Área do losango: $A = \dfrac{d\,D}{2}$ Área do trapézio: $A = \dfrac{(b+B)h}{2}$ Área do círculo: $A = \pi R^2$ Área lateral do cilindro: $A = 2\pi Rh$ Área do setor circular: $A = \dfrac{R^2\alpha}{2}$ Área lateral do cone: $A = \pi RG$ Área da superfície esférica: $A = 4\pi R^2$ Área total do tetraedro regular: $A = \sqrt{3}\,a^2$	Volume do paralelepípedo: V=B.h Volume do cubo: $V = a^3$ Volume do prisma: $V = B \cdot h$ Volume da pirâmide: $V = \dfrac{B \cdot h}{3}$ Volume do cilindro: $V = \pi R^2 h$ Volume do cone: $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$ Volume da esfera: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$
Progressões	Progressão Aritmética (P. A.): $a_n = a_1 + (n-1)r$ $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$	Progressão Geométrica (P. G.): $a_n = a_1 q^{n-1}$ $S_n = \dfrac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}, q \neq 1$ $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}, \lvert q \rvert < 1$
Geometria Analítica	Ponto Médio do segmento de extremidades A(x_1, y_1) e B (x_2, y_2): $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ Área do triângulo de vértices $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ e $R(x_3, y_3)$: $A = \dfrac{1}{2}\lvert D \rvert$, onde $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$	Distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $r: ax + by + c = 0$: $d_{P,r} = \left\lvert \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\rvert$
Conversão de unidades	$1\ m^3 = 1000\ \ell$	