

Questão 01

O principal monumento da cidade de Maringá é a sua catedral, cuja altura é de 124 m, já incluída a cruz, que é de 10 m. A catedral possui o formato de um cone com, aproximadamente, 50 m de diâmetro externo e 40 m de diâmetro interno. Além disso, a geratriz do cone externo que delimita a catedral mede, aproximadamente, 116,7 m. Levando-se em conta esses dados e supondo a catedral formada por uma “casca” delimitada por dois cones de bases concêntricas e geratrizes paralelas e usando $\pi = 3$, é **correto** afirmar que

- 01) a altura livre da catedral (distância entre a base e o ponto mais alto do teto) é superior a 80 m.
- 02) a superfície lateral do cone externo que delimita a catedral é superior a 9600 m^2 .
- 04) em aglomerações estima-se o número de pessoas presentes, considerando que cada metro quadrado comporte 6 pessoas. Sendo assim, se o térreo da catedral, completamente vazio, pudesse ser livremente tomado por pessoas em uma aglomeração, poderia comportar mais de 8000 pessoas.
- 08) a coroa circular, na base da catedral, delimitada pelos cones externo e interno, possui área inferior a 600 m^2 .
- 16) se o cone externo que delimita a catedral fosse planificado teríamos um setor circular de ângulo superior a 45 graus.

Questão 02

Em um sistema de coordenadas cartesianas xOy , em que $ABCD$ seja o quadrilátero determinado pelos vértices e pelos pontos de interseções das parábolas $y = -2x^2 + 2$ e $y = x^2 - 1$; seja $S = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ o conjunto das retas distintas determinadas pelos pontos consecutivos de $ABCD$, é **correto** afirmar que

- 01) $ABCD$ é um retângulo.
- 02) S contém retas paralelas.
- 04) a área de $ABCD$ mede 3 u.a..
- 08) a área da região plana determinada pela interseção das parábolas é maior que 3 u.a. e é menor que 6 u.a..
- 16) o eixo das abscissas divide o quadrilátero $ABCD$ em duas regiões de áreas iguais.

O GPS (*global position by satellite*) é um sistema computadorizado de posicionamento no solo, cada vez mais utilizado nos veículos, por meio do qual nos são enviadas informações via satélite, que nos localizam e permitem localizar os destinos desejados em uma pequena tela gráfica. Em um determinado modelo de GPS, uma das opções de tela é a localização através de um sistema de coordenadas cartesianas, com medidas em centímetros, em que a origem $O = (0,0)$ representa algum ponto importante escolhido pelo usuário. A partir dessas informações, considerando que um motorista que esteja viajando a uma velocidade constante de 100 km/h se encontra no ponto $P = (-3,4)$ e deseja atingir a origem O e que, nesse momento, o GPS indica que esse motorista atingirá o destino em cinco horas e usando $\pi = 3$, assinale o que for **correto**.

- 01) A equação da reta \overline{OP} é $y = -\frac{3}{4}x$.
- 02) A distância entre o lugar em que se encontra o motorista e o seu destino é de 500 km.
- 04) Se após 3 horas de viagem, o motorista parar por 30 minutos para descansar e quiser manter o tempo de viagem inalterado, ele deve continuar sua viagem a, aproximadamente, 133 km/h.
- 08) A equação da circunferência em que o segmento OP é um diâmetro é dada por $(x-2)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$.
- 16) Se a partir de P o motorista dirigisse exatamente sobre a circunferência em que o segmento OP é um diâmetro, ele percorreria 750 km.

Sobre o polinômio $P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 3$, assinale o que for **correto**.

- 01) $P(x)$ é divisível por $Q(x) = x^2 + bx + c$, se $b = c = -2$.
- 02) Se $P(x)$ possui somente raízes racionais e todos os seus coeficientes são números inteiros, então, $P(x)$ possui somente raízes inteiras.
- 04) Se i e $\sqrt{3}i$ são raízes desse polinômio, então, $b = 0$.
- 08) A soma dos inversos das raízes, levando-se em conta suas multiplicidades, é $-d/3$.
- 16) Se $P(x)$ possui somente raízes inteiras, então, alguma raiz possui multiplicidade maior do que 1.

Uma pequena empresa possui em sua linha de produção 4 funcionários que, em conjunto, produzem 800 peças a cada 5 dias (uma semana útil). Sabendo que quaisquer dois funcionários produzem, todos os dias, o mesmo número de peças, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

- 01) A produção semanal de cada funcionário é de 200 peças.
- 02) Para conseguir atender a uma encomenda de 1600 peças, em um prazo de 2 dias, será necessário contratar mais 12 funcionários.
- 04) Em 4 semanas de trabalho, 2 funcionários produzem 2000 peças.
- 08) Se cada funcionário ganha um bônus salarial de 10 centavos de real por peça produzida, em um mês em que trabalhou 22 dias, o bônus é de 88 reais.
- 16) Se a jornada de trabalho é de 8 horas, é necessário que cada um trabalhe mais 90 minutos por dia, a fim de produzir 1000 peças em uma semana útil.

Considere um triângulo equilátero ABC cuja base AB está apoiada sobre uma reta r e mede L cm. A partir do ponto B , constrói-se um novo triângulo equilátero $BB'C'$ cuja base BB' também está apoiada na reta r e mede a metade de AB . Esse processo é novamente repetido a partir do ponto B' e assim por diante, gerando uma sequência infinita de triângulos. Com base nessas informações, assinale o que for **correto**.

- 01) A sequência numérica, formada pelas medidas das áreas dos triângulos em ordem decrescente, é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.
- 02) A soma das áreas dos triângulos mede $\frac{L^2\sqrt{3}}{3}$ cm².
- 04) Para qualquer que seja $L > 0$, a sequência numérica formada pelas áreas dos triângulos sempre conterá pelo menos um número inteiro.
- 08) A sequência numérica, formada pelas medidas das alturas dos triângulos em ordem decrescente, é uma progressão aritmética de razão 2.
- 16) A soma das medidas das alturas é $L\sqrt{3}$ cm.

Questão 07

Sobre uma sequência infinita de números reais $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, é **correto** afirmar que,

- 01) se tal sequência é uma progressão geométrica de razão $1/2$, a mesma converge para zero.
- 02) se tal sequência é uma progressão geométrica de razão $3/4$, a soma de seus termos converge para $\frac{4a_1}{3}$.
- 04) se tal sequência é uma progressão geométrica não-constante, satisfazendo, para todo natural n , $a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$, sua razão é necessariamente 2.
- 08) se tal sequência é uma progressão aritmética, e dois termos em posições distintas coincidem, isto é, existem naturais $i \neq j$ tais que $a_i = a_j$, então, sua razão é 0.
- 16) se tal sequência é uma progressão aritmética, e a soma de seus 2011 primeiros termos é 2011, então, $a_{1006} = 1$.

Questão 08

O pregão da bolsa de valores de São Paulo se inicia às 10 h e é encerrado às 17 h. Supondo que em um dia de pregão o índice IBOVESPA (em pontos) obedeceu à função $I(t) = -200t^2 + 800t + 68000$, em que t representa horas decorridas a partir da abertura do pregão, é **correto** afirmar que

- 01) o pregão se encerrou com queda entre 3% e 4%.
- 02) a diferença entre o valor máximo do índice no dia e o valor inicial foi maior do que 1% sobre o índice inicial.
- 04) às 14 h o índice IBOVESPA ficou igual ao índice da abertura do pregão.
- 08) ao meio-dia o índice atingiu seu valor máximo.
- 16) o valor mínimo do índice ao longo do pregão foi de 65000 pontos.

Questão 09

Considerando $N = 25!$, assinale o que for **correto**.

- 01) Existem 10 números primos distintos que são divisores de N .
- 02) A soma de todos os inteiros positivos que são potências de 7 e divisores de N é igual a 400.
- 04) 435 é divisor de N .
- 08) $N > 25^{25}$.
- 16) N é divisor de $30!$.

Questão 10

Sejam f e g duas funções cujos domínio e contradomínio são o conjunto dos números reais, é **correto** afirmar que,

- 01) sempre que g é injetora, $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é injetora.
02) se f é decrescente e g também é decrescente, então, $f \circ g$ também é decrescente.
04) se f é crescente, g é decrescente e $g(x) > 0$ para todo x real, então, f/g é crescente.
08) se f é decrescente e g decrescente, então, $f + g$ é decrescente.
16) se os gráficos de f e de g não interceptam o eixo das abscissas, então, o gráfico de $f \cdot g$ também não intercepta o eixo das abscissas.

Questão 11

Nosso sistema de numeração é chamado de *decimal*, pois a representação posicional do número indica uma soma de potências de dez. Assim, o número cinquenta e dois é representado por $52 = 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$. Com respeito às bases três e quatro, o mesmo número é representado, respectivamente, por $1221 = 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$ e $310 = 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0$. Em uma base b entre 2 e 10, são utilizados b dígitos $0, 1, 2, \dots, b-1$. A esse respeito, assinale o que for **correto**.

- 01) Sessenta e um é representado por 123 na base 7.
02) A igualdade $31 - 12 = 13$ é verdadeira, se a base empregada para escrever todos os números for a base 4.
04) 121 é a representação de um número quadrado perfeito em qualquer base maior do que 2.
08) 1011 é a representação do número quinze na base 2.
16) 31 é a representação de um número par na base 5.

Rascunho

Questão 12

Considerando H e Δ os seguintes subconjuntos do plano complexo: $H = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } b > 0\}$, ou seja, H é o semiplano superior, e $\Delta = \{w = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ e } \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$, ou seja, Δ é o conjunto dos pontos interiores do disco unitário de equação $x^2 + y^2 = 1$ e que, para medir a distância de $w \in \Delta$ até a origem $O = (0,0)$, usa-se a fórmula

$$d(w, O) = \log_2 \left| \frac{1+w}{1-w} \right|, \text{ é correto afirmar que,}$$

01) se $w = \frac{3}{5} \in \Delta$, então, sua distância até a origem mede 4.

02) se $z = 1 + i \in H$, então, $\frac{z-i}{z+i} \in \Delta$.

04) se $w = \frac{1}{2} \in \Delta$, então, não existe $z \in H$ tal que

$$w = \frac{z-i}{z+i}.$$

08) para toda constante $k > 0$, tem-se que

$$w = \frac{2^k - 1}{2^k + 1} \in \Delta.$$

16) para toda constante $k > 0$, existe $w \in \Delta$, com w real, tal que $d(w, O) = k$.

Questão 13

Supondo que o nível de uma substância tóxica hipotética no sangue de uma pessoa em $\mu\text{g/mL}$, imediatamente após atingir um pico, começa a decrescer segundo a função $f(t) = 100 \cdot (0,8)^t$, em que t representa o tempo, em horas, assumindo-se $\log 2 = 0,3$, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) O tempo gasto para que a concentração da substância seja de $10 \mu\text{g/mL}$ será de 10 horas.

02) A concentração dessa substância no sangue, no pico, é de $100 \mu\text{g/mL}$.

04) A função g , que expressa a concentração da substância no sangue, em minutos após atingido o

pico, é $g(t) = \frac{100 \cdot (0,8)^t}{60}$.

08) Após 4 horas de atingir o pico, a quantidade da substância cai pela metade.

16) Após 2 horas de atingir o pico, a concentração da substância no sangue é de $640 \mu\text{g/mL}$.

Questão 14

Considerando a função f definida por $f(x) = \cos(2x) + \cos(4x)$ e seja S o conjunto das raízes de f , $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$, é **correto** afirmar que

- 01) o valor máximo de f é 2, e existem infinitos pontos do domínio de f que atingem esse valor máximo.
 02) S é um conjunto infinito.
 04) existem cinco raízes de f no intervalo $[0, \pi]$.
 08) existem raízes de f da forma $x = (2k+1)\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
 16) existem raízes de f da forma $x = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Questão 15

Sobre as funções definidas por $f(x) = 2^{-1/x}$ e $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ cujos domínios são ambos o intervalo $]0,1]$

da reta real, é **correto** afirmar que

- 01) ambas são funções injetoras.
 02) ambas funções são decrescentes no intervalo em questão.
 04) a imagem da função g corresponde ao intervalo $]0,1/2]$.
 08) O vértice do gráfico de g é o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$.
 16) $(g \circ f)(1/2) > 1/10$.

Questão 16

Dados números inteiros p e q de forma que a fração $\frac{p}{q}$

seja irredutível, e considerando um sistema de coordenadas cartesianas xOy , o círculo de centro no

ponto $(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2})$ e raio $\frac{1}{2q^2}$ é chamado de círculo de

Ford e é representado por $C[p,q]$. Com base no exposto, assinale o que for **correto**.

- 01) A área de $C[p,q]$ é $\frac{1}{16q^4}$.
 02) Nenhum círculo de Ford tangencia o eixo das abscissas.
 04) A equação cartesiana da circunferência que delimita $C[1,2]$ pode ser escrita como $x^2 + y^2 - x - \frac{y}{4} = -\frac{1}{4}$.
 08) Se dois círculos de Ford, com centros nos pontos M e N , com $M \neq N$, são tangentes no ponto T , então, os pontos M , N e T são colineares.
 16) Os círculos $C[1,2]$ e $C[1,3]$ são tangentes entre si.

Fernando e Guilherme se correspondem por *e-mail* cifrando as mensagens conforme exposto a seguir. Eles associaram as palavras mais comuns a matrizes-linha com 2 colunas, cujas duas entradas são números inteiros com a mesma paridade, isto é, ou ambas são ímpares ou ambas são pares (um número negativo é ímpar, se o seu módulo é ímpar; uma regra análoga vale para número negativo par). Cada entrada a_{ij} satisfaz $-10 < a_{ij} < 10$.

Todas as matrizes desse tipo são utilizadas e, para matrizes distintas, são associadas palavras distintas. Então, eles multiplicam a matriz $[a_{11} \ a_{12}]$ assim obtida

pela matriz $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, obtendo-se uma nova matriz-

linha com 2 colunas, que corresponde à palavra cifrada. Eles enviam um ao outro a mensagem, trocando as palavras cifráveis pelas matrizes assim obtidas. Com essas informações, é **correto** afirmar que

- 01) a palavra correspondente à matriz $\begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix}$, quando cifrada, é representada pela matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$.
- 02) é possível decifrar as mensagens cifradas recebidas, multiplicando-se à direita cada matriz recebida pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- 04) a matriz $\begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix}$ nunca é enviada em uma mensagem cifrada dessa forma.
- 08) a única matriz-linha que não se altera após ser cifrada é a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- 16) o número total de palavras cifráveis é de 361.

Questão 18

Representando por \mathbb{R} o conjunto dos números reais, \mathbb{Q} o conjunto dos números racionais, \mathbb{Z} o conjunto dos números inteiros e \mathbb{N} o conjunto dos números naturais sem o zero e considerando \mathbb{R} como conjunto universo, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

- 01) $0 \in (\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) - (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$.
- 02) $-0,333... \in [(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) - (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})]^C$.
- 04) $\sqrt{2} \in (\mathbb{R} \cup \mathbb{Q}) - (\mathbb{R} \cap \mathbb{Q})$.
- 08) $(\mathbb{R} \cap \mathbb{Q})^C - \mathbb{Z}$ contém todos os números primos.
- 16) $0 \notin (\mathbb{Q} \cap \mathbb{N})^C \cap (\mathbb{Z} - \mathbb{N})^C$.

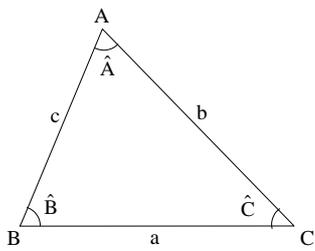
João foi submetido a uma prova constituída por 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas em cada questão, dentre as quais apenas uma é correta. Das dez questões, João respondeu corretamente às quatro primeiras. Nas questões de 05 a 08, ficou em dúvida entre a alternativa correta e uma falsa; na questão 09, ficou em dúvida entre três alternativas, sendo que uma delas era a correta; e na questão restante não conseguiu eliminar nenhuma alternativa. Nas questões em que ficou em dúvida, assinalou uma das alternativas entre as quais ficou em dúvida. Considerando que ele escolheu de maneira equiprovável essas alternativas, é **correto** afirmar que

- 01) João pode responder à prova de 120 maneiras diferentes.
- 02) a probabilidade de João errar todas as questões em que ficou em dúvida entre duas alternativas é de $1/16$.
- 04) a probabilidade de João errar apenas uma dentre as duas últimas questões é de $7/15$.
- 08) a probabilidade de João acertar apenas as questões pares, a partir da quarta questão, é maior do que a probabilidade de acertar apenas as questões ímpares, a partir da quinta questão (inclusive).
- 16) a probabilidade de João errar todas as questões, a partir da quinta (inclusive), é oito vezes a probabilidade de gabaritar a prova.

Uma caixa com tampa possui a forma de um cilindro circular reto, com altura de 10 cm e a base com diâmetro medindo o triplo da altura. Essa caixa será preenchida com esferas idênticas que possuem o maior volume possível e de modo que uma das esferas tangencie o centro do disco que forma o fundo da caixa. Com base nessas informações, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

- 01) O volume da caixa é de $2250\pi \text{ cm}^3$.
- 02) O volume de cada esfera é de $\frac{500}{3}\pi \text{ cm}^3$.
- 04) A caixa conterá 13 esferas.
- 08) O volume livre restante na caixa, após a colocação das esferas, é de $\frac{3250}{3}\pi \text{ cm}^3$.
- 16) Seja C a esfera no centro da caixa e C_1 uma esfera tangente a C , o volume da região interna da caixa determinada por dois planos, ambos tangentes a C_1 , que contenham o eixo do cilindro (caixa) é de $750\pi \text{ cm}^3$.

MATEMÁTICA – Formulário

Trigonometria	$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$ $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg}(x) \pm \operatorname{tg}(y)}{1 \mp \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p><i>Lei dos senos:</i></p> $\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$ <p><i>Lei dos cossenos:</i></p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$ </div> </div>
Análise Combinatória	$P_n = n!$ $A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$	$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_{n,i} a^{n-i} b^i$
Geometria Plana e Espacial	<p>Comprimento da circunferência: $C = 2\pi R$</p> <p>Área do losango: $A = \frac{d D}{2}$</p> <p>Área do trapézio: $A = \frac{(b+B)h}{2}$</p> <p>Área do círculo: $A = \pi R^2$</p> <p>Área lateral do cilindro: $A = 2\pi R h$</p> <p>Área do setor circular: $A = \frac{R^2 \alpha}{2}$</p> <p>Área lateral do cone: $A = \pi R G$</p> <p>Área da superfície esférica: $A = 4\pi R^2$</p> <p>Área total do tetraedro regular: $A = \sqrt{3} a^2$</p>	<p>Volume do paralelepípedo: $V = B \cdot h$</p> <p>Volume do cubo: $V = a^3$</p> <p>Volume do prisma: $V = B \cdot h$</p> <p>Volume da pirâmide: $V = \frac{B \cdot h}{3}$</p> <p>Volume do cilindro: $V = \pi R^2 h$</p> <p>Volume do cone: $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$</p> <p>Volume da esfera: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$</p>
Progressões	<p>Progressão Aritmética (P. A.):</p> $a_n = a_1 + (n-1)r$ $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$	<p>Progressão Geométrica (P. G.):</p> $a_n = a_1 q^{n-1}$ $S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q}, q \neq 1$ $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, q < 1$
Geometria Analítica	<p>Ponto Médio do segmento de extremidades A(x_1, y_1) e B(x_2, y_2):</p> $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ <p>Área do triângulo de vértices P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) e R(x_3, y_3):</p> $A = \frac{1}{2} D , \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$	<p>Distância de um ponto P(x_0, y_0) à reta r: $ax + by + c = 0$:</p> $d_{P,r} = \frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$
Conversão de unidades	$1 \text{ m}^3 = 1000 \ell$	