Vestibular UEM Verão 2010

Prova 3 – Matemática

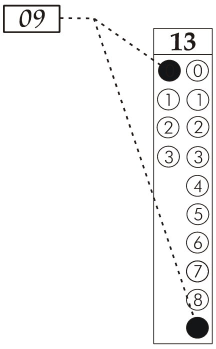
QUESTÕES OBJETIVAS - VESTIBULAR DE VERÃO 2010

N.º DE ORDEM: **N.º DE INSCRIÇÃO:**

NOME DO CANDIDATO:

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

1. Confira os campos N.º DE ORDEM, N.º DE INSCRIÇÃO e NOME, conforme o que consta na etiqueta fixada em sua carteira.
2. Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante na etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
3. **É proibido folhear o Caderno de Provas antes do sinal, às 9 horas**.
4. Após o sinal, confira se este caderno contém 40 questões objetivas (20 de cada matéria) e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
5. O tempo mínimo de permanência na sala é de 2 horas após o início da resolução da prova.
6. No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluído o de preenchimento da Folha de Respostas.
7. Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta correta será a soma dos números associados às proposições verdadeiras. Para cada questão, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma das proposições 01 e 08).
8. Se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas constante nesta prova e destaque-o, para retirá-lo hoje, nesta sala, no horário das 13h15min às 13h30min, mediante apresentação do documento de identificação do candidato. Após esse período, não haverá devolução.
9. Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas e o Rascunho para Anotação das Respostas.



Corte na linha pontilhada.

RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS – VESTIBULAR DE VERÃO 2010 – PROVA 3

N.º DE ORDEM: **NOME:**

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

GABARITO 3

MATEMÁTICA

Questão 01

As arestas de um cubo medem 10 cm. De cada um de seus vértices, retira-se uma pirâmide de base triangular, cujas arestas ligadas ao vértice do cubo possuem todas a mesma medida a e são partes das arestas do cubo. Após a remoção das pirâmides, obtém-se um poliedro convexo P. Baseando-se nessas informações, assinale o que for **correto**.

01) Se $a < 5$ cm, o poliedro P tem 14 faces.
02) Se $a < 5$ cm, o poliedro P tem 36 arestas.
04) Se $a < 5$ cm, o poliedro P tem 24 vértices.
08) Se $a = 5$ cm, o poliedro P tem 30 arestas.
16) Se $a = 5$ cm, o poliedro P tem 16 vértices.

Questão 02

Uma caixa contém 10 lâmpadas, das quais duas estão queimadas. As lâmpadas serão testadas uma a uma, até serem determinadas as duas queimadas. Em relação ao exposto, assinale o que for **correto**.

01) A probabilidade de a lâmpada do primeiro teste estar queimada é $\frac{1}{10}$.
02) Se a lâmpada do primeiro teste estiver boa, a probabilidade de a lâmpada do segundo teste estar queimada é $\frac{2}{9}$.
04) A probabilidade de serem feitos exatamente cinco testes para se determinar as duas lâmpadas queimadas é $\frac{2}{45}$.
08) A probabilidade de serem feitos mais que cinco testes para se determinar as duas lâmpadas queimadas é $\frac{7}{9}$.
16) A probabilidade de serem feitos menos que cinco testes para se determinar as duas lâmpadas queimadas é $\frac{4}{15}$.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 03

Considerando, em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas xOy, a circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$, o quadrado Q de lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito na circunferência C, e a unidade de medida padrão em cada eixo como sendo o centímetro (cm), assinale o que for **correto**.

01) A circunferência C é centrada no ponto $H = (-1, 1)$ e possui diâmetro medindo $4\sqrt{2}$ cm.
02) O quadrado Q tem lados medindo $\sqrt{8}$ cm.
04) As retas que contêm as diagonais do quadrado Q têm equações $y = -x$ e $y = x + 2$.
08) A reta r de equação $y = 5x - 2$ contém o centro da circunferência C.
16) O triângulo de vértices $A = (2, 0)$, $B = (6, 0)$ e $C = (6, 4)$ é congruente ao triângulo UVW, em que U, V e W são três vértices do quadrado Q.

Questão 04

Considerando o sistema I abaixo, em que z e w são números complexos, e $\overline{z}$ e $\overline{w}$ são, respectivamente, os seus complexos conjugados, assinale o que for **correto**.

$$\text{I:} \quad \begin{cases} w^2 - z^2 = 10(1 - \sqrt{3}\, i^{23}) & (1) \\ 6\overline{z} - \sqrt{3}\,\overline{w} = 4\sqrt{3}\, i & (2) \end{cases}$$

01) A equação (1) do sistema I é equivalente a $w^2 - z^2 = 10 - 10\sqrt{3}\, i$.
02) O par (z, w) dos números complexos $z = 1 - \sqrt{3}\, i$ e $w = 2\sqrt{3} + 2i$ é uma solução do sistema I.
04) O par (z, w) dos números complexos $z = 2 - \frac{4\sqrt{3}}{3} i$ e $w = 4\sqrt{3} - 4i$ é solução da equação (2) de I, mas não satisfaz à equação (1).
08) O par (z, w) dos números complexos $z = 2\cos\frac{5\pi}{3} + 2\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3} i$ e $w = 4\cos\frac{\pi}{3} + 4\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} i$, é uma solução da equação (2) de I.
16) Dois números complexos, ambos sendo números imaginários puros, não formam uma solução de I.

Rascunho

Questão 05

Considerando a tabela abaixo, em que constam os resultados obtidos em uma eleição para prefeito de um certo município, assinale o que for **correto**.

Candidato	Porcentagem do total de votos	Número de votos em milhares
A	46%	
B	32%	
C	19%	
Nulos e Brancos		9,75

01) 325 mil eleitores votaram para prefeito.
02) O número de eleitores que votaram em favor do candidato A é maior do que 145 mil.
04) O porcentual de votos obtidos pelo candidato A sobre o total de votos não nulos e não brancos foi de 50%.
08) O candidato A venceu as eleições com uma vantagem, em relação ao candidato B, de mais de 15% sobre o total de votos não nulos e não brancos.
16) O candidato C obteve menos de 25% do total dos votos obtidos pelos outros dois candidatos.

Questão 06

Assinale o que for **correto**.

01) O coeficiente do termo x^3 em $\left(x-\frac{2}{x}\right)^9$ é -672.
02) As raízes da equação $(\sqrt{2}+1)^x+\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)^x}=\sqrt{2}+2$ são maiores do que 1.
04) Se x e y são números reais tais que $y>x$, então $a^y>a^x$, em que a é uma constante real positiva.
08) A equação $4!\,C_{x-2,\,2}-A_{x,\,3}=0$ possui exatamente duas soluções no conjunto dos números inteiros maiores ou iguais a 4.
16) $\log_{\frac{1}{49}}\sqrt{7}=-\frac{1}{4}$.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 07

Assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) $\cos^4 x - \text{sen}^4 x - 2\cos^2 x + 1 = 0$, qualquer que seja x real.

02) Se x é um arco do terceiro quadrante e $\cos x = -\frac{3}{5}$, então $1 - 2\sec x \,\text{tg}\, x = \frac{49}{9}$.

04) $\cos(\pi + x) + \text{sen}(\frac{\pi}{2} + x) = 0$, qualquer que seja x real.

08) O domínio da função f definida por $f(x) = \frac{1 + \text{sen}^2 x}{\text{tg}(\pi + x)}$, em que $-\pi \leq x \leq \pi$, é $\left\{x \in [-\pi, \pi] \,/\, x \neq -\frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2}\right\}$.

16) $\sec\left(\frac{53\pi}{11}\right) > 1$.

Questão 08

Considerando a seguinte equação de recorrência de números inteiros, $x_{n+1} = x_n + 5^n$, em que n é um número inteiro positivo e $x_1 = 1$, assinale o que for **correto**.

01) $x_n = \frac{1}{4}(5^n - 1)$, para todo inteiro $n > 1$.

02) x_n é um número composto para todo $n \geq 2$.

04) $x_n - x_{n-1}$ é divisível por 5, qualquer que seja o inteiro positivo n, $n \geq 2$.

08) $x_n = 781$ para algum inteiro positivo n, $n \geq 2$.

16) A sequência $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ é uma progressão aritmética.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 09

Considerando os sistemas lineares I: $\begin{cases} 2x - \frac{1}{5}y = 5 \\ 6x - 2y = 8 \end{cases}$ e II: $\begin{cases} kx + 2y = 2k + 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$, em que k é uma constante real, assinale o que for **correto**.

01) O sistema I é possível e determinado.
02) Não existe valor real de k para o qual o sistema II seja possível e indeterminado.
04) Existe um único valor da constante real k para o qual o sistema II seja possível e determinado.
08) Se $k = -6$, o sistema II é equivalente ao sistema I.
16) O par ordenado $(-1,\ 1)$ é solução do sistema II, para algum valor real de k.

Questão 10

Considerando as matrizes de números reais, quadradas e de ordem 3, $A = \left(a_{ij}\right)$ e $B = \left(b_{ij}\right)$, definidas, respectivamente, por

$$a_{ij} = \begin{cases} 2^{j} & \text{se } i > j \\ 2^{i-j} & \text{se } i = j \\ 2^{j-i} & \text{se } i < j \end{cases} \quad \text{e} \quad b_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} & \text{se } i > j \\ 0 & \text{se } i \leq j \end{cases}$$

e que A^t indica a transposta da matriz A, assinale o que for **correto**.

01) A matriz B é invertível.
02) $AB \neq BA$.
04) Existe um valor inteiro positivo n para o qual B^n é a matriz quadrada nula de ordem 3.
08) A matriz $A - A^t = \left(c_{ij}\right)$ satisfaz $c_{ij} = -c_{ji}$ para todo i e para todo j.
16) A matriz $A.A^t = \left(d_{ij}\right)$ satisfaz $d_{ij} = d_{ji}$ para todo i e para todo j.

Rascunho

Questão 11

Uma fazenda possui uma represa utilizada para a irrigação das plantações. A represa possui cinco comportas, denominadas **A**, **B**, **C**, **D** e **E**, sendo que **A** e **B** fornecem água à represa, e **C**, **D** e **E** permitem a saída de água da represa. A comporta **A,** sozinha, enche a represa em duas horas, e a comporta **B,** sozinha, enche a represa em três horas. A comporta **C**, sozinha, esvazia a represa em quatro horas, e **D**, sozinha, esvazia a represa em cinco horas. Baseando-se nessas informações, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) Se a represa estiver vazia, e as comportas **A** e **B** forem abertas, ela estará cheia em 72 minutos.
02) Se a represa estiver cheia, e as comportas **C** e **D** forem abertas, a represa estará vazia em $\frac{20}{9}$ horas.
04) Se a represa estiver vazia, e **A**, **B**, **C** e **D** forem abertas, a represa estará cheia em 2 horas.
08) Se a represa estiver com metade de seu volume, e **A** e **C** forem abertas, ela estará cheia em 2 horas.
16) Se com as comportas **A**, **B** e **E** abertas, o volume da represa não se altera, então **E** sozinha esvazia a represa em 72 minutos.

Questão 12

Considerando a função $f(x) = 2^{-x/12}\cos x$, com $0 \le x \le 12\pi$, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) A função *f* é periódica com período π.
02) As raízes da função *f* são também raízes da função $g(x) = \cos x$.
04) Para $x > 12$, tem-se que $|f(x)| \le \frac{1}{2}$.
08) O valor máximo de *f* é 1.
16) O valor mínimo de *f* é -1.

Rascunho

GABARITO 3

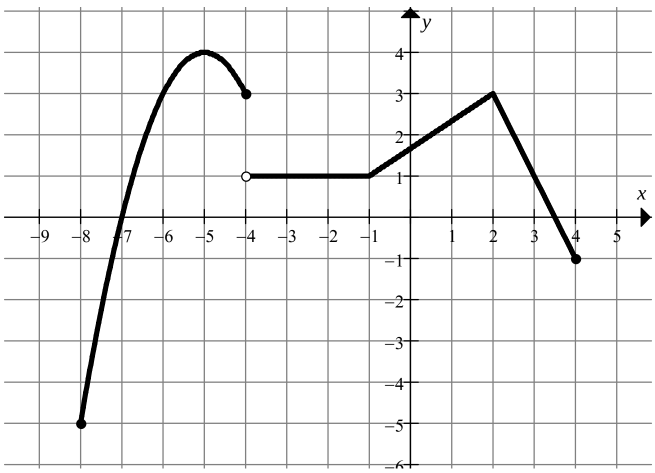
Questão 13

Dado um número natural $n \geq 1$ e considerando que as raízes n-ésimas da unidade são as raízes complexas do polinômio $x^n - 1$, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) O módulo de qualquer raiz n-ésima da unidade é igual a 1.
02) Todas as raízes de $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ são também raízes sextas (6-ésimas) da unidade.
04) Se z_1 e z_2 são raízes n-ésimas da unidade, ambas distintas de 1, então $z_1 z_2$ também é uma raiz n-ésima da unidade.
08) Se z_1 é uma raiz quinta da unidade e z_2 é uma raiz sétima da unidade, então $\frac{z_2}{z_1}$ é uma raiz quinta da unidade.
16) $x = -1$ é sempre raiz da unidade para $n \geq 2$.

Questão 14

Considerando a figura abaixo, que ilustra o gráfico de uma função $f : [-8, 4] \to \mathbb{R}$ em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas xOy, em que a porção referente ao subintervalo do domínio $[-8, -4]$ é parte de uma parábola, e o restante do gráfico é uma linha poligonal, assinale o que for **correto**.



01) Se $-8 \leq x \leq -4$, então $f(x) = -x^2 - 10x - 21$.
02) $f(\frac{8}{3}) = \frac{5}{3}$.
04) $\frac{f(2) - f(4)}{2} > \frac{f(2) - f(-1)}{3}$.
08) A equação $f(x) = 1$ possui apenas cinco raízes reais distintas.
16) Se x é solução da equação $f(x) = 2$, então $0 < x < 3$.

Rascunho

Questão 15

Considerando que $\boldsymbol{S}$ é o conjunto de todas as retas do plano com equação da forma $ax+by=c$, em que a, b e c são números reais distintos em progressão geométrica, nessa ordem, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) Duas retas distintas de $\boldsymbol{S}$ podem ser paralelas.
02) O conjunto $\boldsymbol{S}$ não contém retas horizontais.
04) O conjunto $\boldsymbol{S}$ não contém retas verticais.
08) A reta $x-y=0$ não intercepta nenhuma reta de $\boldsymbol{S}$.
16) O conjunto $\boldsymbol{S}$ contém retas perpendiculares entre si.

Questão 16

Considerando que as medidas, em centímetros, dos lados de um paralelepípedo retângulo são três números inteiros consecutivos, tais que o produto deles é oito vezes a sua soma, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) A soma é um múltiplo de 5.
02) O volume do paralelepípedo é 60 cm^3.
04) A área lateral do paralelepípedo é 148 cm^2.
08) O comprimento da maior diagonal do paralelepípedo é 9 cm.
16) Uma das medidas dos lados do paralelepípedo é múltiplo de 3.

Questão 17

Seja *ABCD* um retângulo com altura 2 cm, em que os pontos $A=(1,0)$ e $B=(2,0)$ pertencem à base, os pontos *C* e *D* se localizam no primeiro quadrante, e o segmento *AD* é paralelo ao segmento *BC*.
Seja *P* o ponto de interseção das diagonais de *ABCD* e *r* a reta que passa por *P* e pela origem $O=(0,0)$. Sejam *M* e *N* os pontos onde *r* intersecta *ABCD*, tal que *M* pertence ao segmento *AD* e *N* pertence ao segmento *BC*. Considerando o exposto, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) A área do trapézio *AMNB* é 1 cm^2.
02) As medidas dos segmentos *AM* e *NC* são iguais.
04) A reta *r* é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{DP}$.
08) A área do triângulo *MAP* é $\frac{1}{6}$ cm^2.
16) Toda reta que passa pelo ponto *P* e que intersecta o lado *AD* do retângulo divide este em duas regiões de áreas iguais.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 18

Considerando o polinômio $p(x)=\begin{vmatrix} x & x-2 & 0 \\ 1 & 1 & x+2 \\ -1 & x & 0 \end{vmatrix}$, assinale o que for **correto**.

01) A equação $p(x)=0$ possui uma raiz de multiplicidade 2.
02) O resto da divisão de $p(x)$ por $(x+3)$ é um número primo.
04) $p\left(\frac{1}{2}\right)>\frac{13}{4}$.
08) Se $a<-2$ e $b>1$, então $p(a)\cdot p(b)<0$.
16) O polinômio $q(x)=p(x)-4$ é irredutível.

Questão 19

Para arrecadar fundos, uma associação beneficente realizará um sorteio de diversos prêmios. Para esse sorteio, foram vendidas cartelas numeradas com números de 4 dígitos e cada dígito variando de 1 a 6. A escolha da cartela vencedora se dará pela retirada de bolas numeradas de 1 a 6, e cada bola será retirada de uma urna distinta. Além do prêmio principal a ser dado para a cartela sorteada, prêmios também serão dados pela soma *S* e pelo produto *P* dos dígitos do número de cada cartela. Supondo que todas as cartelas foram vendidas, assinale o **correto**.

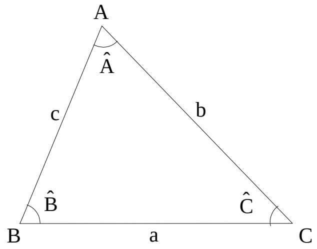
01) Foram vendidas 1.300 cartelas.
02) Existem 650 cartelas com números pares.
04) Existem 650 cartelas com *S* ímpar.
08) Existem 1.215 cartelas com *P* par.
16) Se para uma determinada cartela *P* é ímpar, então *S* é par.

Questão 20

Um brinquedo eletrônico tem um disco de 10 cm de raio, e esse disco possui 5 pontos igualmente distribuídos em seu bordo e numerados de 1 a 5 no sentido horário. Uma esfera magnética movimenta-se na borda desse disco. Quando posicionada em um ponto de número ímpar, movimenta-se para o próximo número, em sentido horário; e quando posicionada em um ponto de número par, movimenta-se dois números também em sentido horário. Em relação ao exposto, assinale o que for **correto**.

01) Se a esfera é inicialmente colocada no ponto de número 5, com 1.000 movimentos, a esfera irá parar no ponto de número 2.
02) Se a esfera começa na posição 1, com dois movimentos, o ângulo do maior arco compreendido entre a posição 1 e a posição final, em relação ao centro do disco, em radianos, mede $\frac{6\pi}{5}$.
04) Se a esfera começa na posição 2, com 3 movimentos, o caminho total que a esfera percorre mede 10π cm.
08) Se a esfera não inicia na posição 5, então ela nunca passará por essa posição.
16) Qualquer que seja a posição em que a esfera seja inicialmente colocada, ela sempre passará pela posição 4.

MATEMÁTICA – Formulário

Trigonometria	$\mathrm{sen}(x \pm y) = \mathrm{sen}(x)\cos(y) \pm \mathrm{sen}(y)\cos(x)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(y)$ $\mathrm{tg}(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{tg}(x) \pm \mathrm{tg}(y)}{1 \mp \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)}$	 *Lei dos senos:* $\dfrac{a}{\mathrm{sen}(\hat{A})} = \dfrac{b}{\mathrm{sen}(\hat{B})} = \dfrac{c}{\mathrm{sen}(\hat{C})}$ *Lei dos cossenos:* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$
Análise Combinatória	$P_n = n!$ $A_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$	$C_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, a^{n-i}\, b^i$
Geometria Plana e Espacial	Comprimento da circunferência: $C = 2\pi R$ Área do losango: $A = \dfrac{d\,D}{2}$ Área do trapézio: $A = \dfrac{(b+B)h}{2}$ Área do círculo: $A = \pi R^2$ Área lateral do cilindro: $A = 2\pi Rh$ Área do setor circular: $A = \dfrac{R^2\alpha}{2}$ Área lateral do cone: $A = \pi RG$ Área da superfície esférica: $A = 4\pi R^2$ Área total do tetraedro regular: $A = \sqrt{3}\,a^2$	Volume do paralelepípedo: $V = B.h$ Volume do cubo: $V = a^3$ Volume do prisma: $V = B \cdot h$ Volume da pirâmide: $V = \dfrac{B \cdot h}{3}$ Volume do cilindro: $V = \pi R^2 h$ Volume do cone: $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$ Volume da esfera: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$
Progressões	Progressão Aritmética (P. A.): $a_n = a_1 + (n-1)r$ $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$	Progressão Geométrica (P. G.): $a_n = a_1 q^{n-1}$ $S_n = \dfrac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}, q \neq 1$ $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}, \lvert q \rvert < 1$
Geometria Analítica	Ponto Médio do segmento de extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$: $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ Área do triângulo de vértices $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ e $R(x_3, y_3)$: $A = \dfrac{1}{2}\lvert D \rvert$, onde $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$	Distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $r: ax + by + c = 0$: $d_{P,r} = \left\lvert \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\rvert$
Conversão de unidades	$1\ m^3 = 1000\ \ell$	

GABARITO 3