Vestibular UEM Inverno 2009

Prova 3 – Matemática

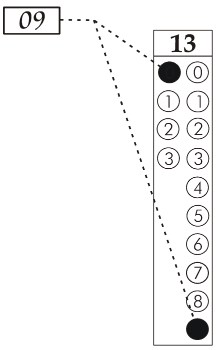
QUESTÕES OBJETIVAS

N.º DE ORDEM: **N.º DE INSCRIÇÃO:**

NOME DO CANDIDATO:

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

1. Confira os campos N.º DE ORDEM, N.º DE INSCRIÇÃO e NOME, conforme o que consta na etiqueta fixada em sua carteira.
2. Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante na etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
3. É proibido folhear o caderno de provas antes do sinal, às 9 horas.
4. Após o sinal, confira se este caderno contém 40 questões objetivas (20 de cada matéria) e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
5. O tempo mínimo de permanência na sala é de 2 h após o início da resolução da prova.
6. No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluído o de preenchimento da Folha de Respostas.
7. Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta correta será a soma dos números associados às proposições verdadeiras. Para cada questão, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma das proposições 01 e 08).
8. Se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas constante nesta prova e destaque-o, para retirá-lo hoje, nesta sala, no horário das 13h15min às 13h30min, mediante apresentação do documento de identificação do candidato. Após esse período, não haverá devolução.
9. Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas e o Rascunho para Anotação das Respostas.



Corte na linha pontilhada.

RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS

N.º DE ORDEM: **NOME:**

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

UEM – Comissão Central do Vestibular Unificado

GABARITO 2

MATEMÁTICA

Rascunho

Questão 01

Considerando o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais quaisquer, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) Se $q(x)$ for um polinômio de grau 2, então $q(x).p(x)$ será um polinômio de grau 6.

02) Se $a = b = 0$ e $c = 8$, então -2 é a única raiz real do polinômio p.

04) Sempre existem constantes reais k, l e m tais que $p(x) = (x-k)(x-l)(x-m)$.

08) Se $p(x)$ é divisível por $(x-1)$, então $1 + a = -b - c$.

16) Se $p(-x) = -p(x)$ para qualquer número real x e $p(-1) = 0$, então $p(0) = 0$ e $p(2) = 6$.

Questão 02

Assinale o que for **correto**, considerando as matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{3\times 3}$, em que os elementos a_{ij} e b_{ij} são números reais, para $1 \le i \le 3$ e $1 \le j \le 3$.

01) Se A é tal que seus elementos a_{ij} são definidos por $a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \ne j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$, para $1 \le i \le 3$ e $1 \le j \le 3$, então $A.B = B$.

02) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

04) Se B é a matriz inversa da matriz A, então $b_{ij} = \dfrac{1}{a_{ij}}$, para $1 \le i \le 3$ e $1 \le j \le 3$.

08) Se $b_{ij} = i + j$, para $1 \le i \le 3$ e $1 \le j \le 3$, então $B^t = B$.

16) Se $b_{ij} = i - j$, para $1 \le i \le 3$ e $1 \le j \le 3$, então $\det B = 0$.

GABARITO 2

Questão 03

Considerando, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, um triângulo equilátero ABC em que A e B são dados, respectivamente, por $(0,0)$ e $(6,0)$ e o ponto C está localizado no primeiro quadrante, assinale o que for **correto**.

01) A altura do triângulo ABC, em relação à base AB, é $3\sqrt{3}$ unidades de comprimento.

02) A reta que contém a aresta $\overline{AC}$ satisfaz a equação $y=\frac{1}{2}x$.

04) As circunferências C_1 e C_2, cujas equações são, respectivamente, $x^2 + y^2 = 9$ e $(x-3)^2 + (y-3\sqrt{3})^2 = 9$, tangenciam-se no ponto médio do segmento $\overline{AC}$.

08) A circunferência C_3 de equação $(x-6)^2+y^2=27$ tem centro em um dos vértices do triângulo ABC e raio igual ao comprimento de uma mediana desse triângulo.

16) As abscissas dos pontos de interseção das circunferências C_1 e C_3, referidas nos itens acima, são iguais a $\frac{1}{2}$.

Questão 04

As afirmações abaixo dizem respeito aos tópicos de trigonometria e funções trigonométricas. Assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) $(\operatorname{sen} 2x)(\operatorname{sen} x)+2\cos^3 x=2\cos x$ para todo número real x.

02) O único valor de $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg} x$ é $x=\frac{\pi}{4}$.

04) Não existe valor real para x tal que $2\cos^2 x+7\cos x=-6$.

08) A função f definida por $f(x)=\operatorname{sen}(4x-\pi)$, em que $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$, é injetora.

16) Se, em um triângulo retângulo, o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo agudo θ medem, respectivamente, $\sqrt{40}$ cm e 10 cm, então $\cos\theta > \frac{5}{6}$.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 05

Assinale o que for **correto**.

01) Se a é um número real positivo e $a \neq 1$, então $\log_a\left(\log_a \dfrac{1}{a^a}\right) = -1$.

02) $\log_{\frac{1}{3}} 3 < \log_3 \dfrac{1}{2}$.

04) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2x+7} < \left(\dfrac{4}{3}\right)^{x-4}$ para todo $x > -1$.

08) Sendo $f(x) = 3^{2x+5}$ e a e b números reais satisfazendo $f(a-1) = 9f(b)$, então $a - b = 2$.

16) As soluções da equação $1 + \log_{10}(x+1) = \log_{10}(x^2 - 14)$ são $x = -2$ e $x = 12$.

Questão 06

Com relação aos números complexos, assinale o que for **correto**.

01) $(2+2i)^6$ é um número imaginário puro.

02) $z = \dfrac{i^{103}}{1+i}$ é um número cujo módulo é $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

04) Se $\dfrac{z+2i}{iz+1} = 3$, então $z = \dfrac{9+7i}{10}$.

08) O ponto, no plano complexo, correspondente ao número complexo $z = \dfrac{i^{103}}{1+i}$ está localizado no 4.º quadrante.

16) $8\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)$ é a forma trigonométrica do número complexo $z = -4\sqrt{3} - 4i$.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 07

Um terreno retangular em que a medida, em metros, do lado maior é o triplo da medida do lado menor será utilizado para a construção de um centro esportivo. Inicialmente, o terreno será cercado por muro e será construído o piso de uma quadra de esportes, que ocupa $\frac{2}{9}$ do terreno. Duas empresas A e B apresentam os orçamentos para a execução dessas obras, conforme esquema abaixo.

Empresa A: R$ 18,00 por metro quadrado de piso, R$ 50,00 por metro linear de muro e R$ 500,00 de taxa de administração.

Empresa B: R$ 24,00 por metro quadrado de piso, R$ 40,00 por metro linear de muro, não cobrando taxa de administração.

Considerando o exposto acima e indicando por x a medida em metros do lado menor do terreno, assinale o que for **correto**.

01) A área da quadra de esportes, em função da medida x, é $\frac{4x^2}{27}\ \text{m}^2$.

02) No orçamento da empresa A, o custo C das obras, em função da medida x metros, é $C(x) = 12x^2 + 400x + 500$ reais.

04) Para um terreno com 1200 m^2 de área, o orçamento apresentado pela empresa A excede em 20% o orçamento apresentado pela empresa B.

08) O orçamento apresentado pela empresa A é mais vantajoso quando o perímetro do terreno é maior do que 200 m.

16) Se a empresa A não cobrar taxa de administração, seu orçamento sempre será menor que o orçamento apresentado pela empresa B.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 08

Em uma pesquisa com um grupo de 1.800 homens e 1.200 mulheres sobre suas preferências entre os produtos das marcas A, B e C, foram obtidos os dados registrados na tabela a seguir.

Marca	HOMENS	MULHERES
A	30%	40%
B	35%	25%
C	35%	35%

Com relação aos dados informados, assinale o que for **correto**.

01) 70% do total de pessoas pesquisadas preferem a marca A.
02) As marcas A e C têm a mesma preferência no grupo pesquisado.
04) Escolhida ao acaso uma pessoa do grupo pesquisado, a probabilidade de que seja do sexo masculino é $\frac{3}{5}$.
08) Escolhida ao acaso uma pessoa do grupo pesquisado, a probabilidade de que seja do sexo masculino e prefira a marca A é 18%.
16) O número de mulheres e de homens que escolheu a marca C é o mesmo.

Questão 09

Assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

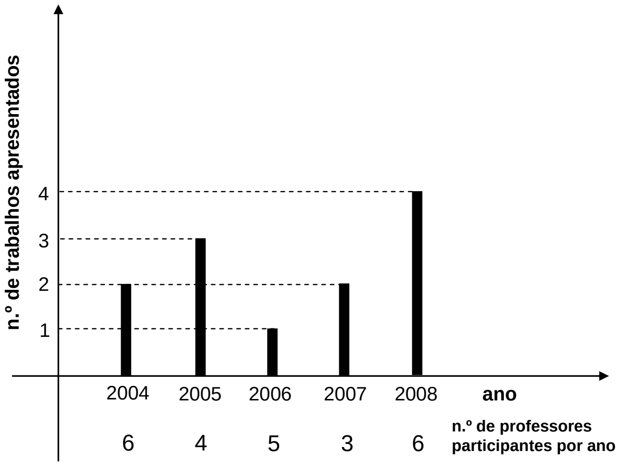
01) O 4.º termo da progressão geométrica $\sqrt{2},\ \sqrt[6]{2},\ \frac{1}{\sqrt[6]{2}},...$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
02) A representação gráfica de uma progressão geométrica de razão q, sendo $q > 0$ e $q \neq 1$, está sobre uma curva exponencial.
04) A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética com termo geral $a_n = \frac{5n-4}{3}$, em que $n \geq 1$, é $\frac{5n-4}{18}$.
08) Não existe progressão geométrica de razão q, em que q é um número real, tal que $a_3 = -21$ e $a_7 = 168$.
16) O maior valor possível que pode ter a razão de uma progressão aritmética que contenha os números 13, 79 e 299 entre seus termos é 11.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 10

Sobre a participação de professores de uma Universidade em um evento científico que acontece anualmente e sobre o número de trabalhos apresentados por alguns professores, considere a figura abaixo.



Com relação aos dados representados na figura, assinale o que for **correto**.

01) Sobre os números anuais de professores participantes no evento nos anos de 2004 a 2008, a média é maior do que 5.

02) Em relação ao número de trabalhos apresentados nos anos de 2004 a 2008, a média é maior do que a mediana.

04) O número de trabalhos apresentados no ano de 2008 corresponde a $\frac{1}{3}$ do número total de trabalhos apresentados no período 2004-2008.

08) Quanto ao número de trabalhos apresentados de 2005 para 2006, houve uma redução de mais de 60%.

16) A razão entre o número de trabalhos apresentados e o número de professores participantes em 2005 é maior do que essa razão em 2008.

Rascunho

GABARITO 2

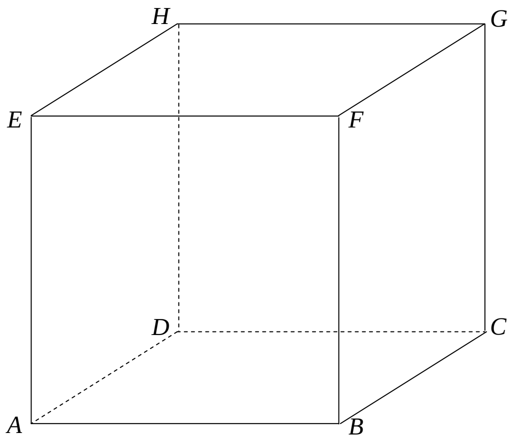
Questão 11

Uma empresa é solicitada para realizar uma pesquisa de campo e, para tal, deve escolher uma equipe de trabalho com 4 pessoas dentre 12 funcionários, dos quais 7 são homens e 5 são mulheres. Com uma jornada diária de 6 horas de trabalho, a equipe compromete-se a entregar os resultados da pesquisa em 20 dias. Sobre o exposto, assinale o que for **correto**.

01) Há 495 possibilidades de escolhas diferentes de uma equipe de trabalho.
02) Há 35 possibilidades de escolhas de uma equipe constituída apenas por homens.
04) Há 210 possibilidades de escolhas para uma equipe constituída por 2 homens e por 2 mulheres.
08) Se, a partir do 18.º dia, a equipe é obrigada a diminuir sua jornada diária para 4 horas, o prazo de entrega deverá ser aumentado em 3 dias.
16) Se a empresa contratante exigisse o prazo de 18 dias para a entrega da pesquisa, a jornada diária da equipe, composta de quatro pessoas, deveria ser de 6 horas e 40 minutos.

Questão 12

Considerando o cubo *ABCDEFGH* representado na figura abaixo, assinale o que for **correto**.



01) A reta determinada pelos vértices *H* e *F* e a reta determinada pelos vértices *A* e *B* são reversas.
02) O tetraedro determinado pelos vértices *A*, *B*, *D* e *H* e o tetraedro determinado pelos vértices *A*, *B*, *C* e *H* têm o mesmo volume.
04) A reta determinada pelos vértices *A* e *C* é paralela ao plano determinado pelos vértices *E*, *H* e *F*.
08) O triângulo determinado pelos vértices *D*, *E* e *F* é retângulo.
16) A seção determinada no cubo pelo plano que contém os vértices *A*, *B* e *G* é um quadrado.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 13

Assinale o que for **correto**.

01) Se $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{12}{25}$.

02) Se $a = 10\,\text{cm}$ e $b = 20\,\text{cm}$ são as medidas de dois lados de um paralelogramo de área $100\sqrt{2}\,\text{cm}^2$, então a medida do menor ângulo formado por esses dois lados é igual a 60°.

04) Sendo α e β arcos do primeiro quadrante tais que $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ e $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, então $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

08) Um triângulo *ABC* em que os lados *AB* e *AC* medem, respectivamente, $8\,\text{cm}$ e 6 cm e o ângulo $\widehat{BAC}$ mede 60° tem o lado *BC* medindo $2\sqrt{13}$ cm.

16) Se *A*, *B* e *C*, nas condições da alternativa anterior, representam cidades em um mapa feito na escala 1 cm : 50.000 cm, então, em linha reta, as cidades *B* e *C* distam mais que 3 km uma da outra.

Questão 14

Considerando os números 60, 110 e 126, assinale o que for **correto**.

01) 2 é o único divisor positivo par de 110.

02) A soma dos números primos positivos que são simultaneamente divisores de 60 e de 126 é igual a 5.

04) A soma dos divisores positivos do número 110 é igual a 216.

08) O mínimo múltiplo comum entre 60 e 110 é 6600.

16) O máximo divisor comum entre 60 e 126 é 6.

Questão 15

Considerando, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, os pontos $A(-7,5)$, $B(-2,0)$, $C(3,5)$ e $D(3,15)$, assinale o que for **correto**.

01) O triângulo de vértices *A*, *B* e *C* é equilátero.

02) A equação da reta perpendicular ao segmento $\overline{AD}$ e que contém *C* é $y = \frac{2}{5}x + \frac{19}{5}$.

04) O quadrilátero *ABCD* tem área igual a 75 unidades de área.

08) O ângulo $\widehat{BAD}$ do quadrilátero *ABCD* mede 60°.

16) O quadrilátero *ABCD* é um trapézio.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 16

Um tanque contém 10 kg de sal dissolvidos em 2000 litros de água. Uma mistura de água com o mesmo tipo de sal entra no tanque e é misturada de modo que se mantenha homogênea, saindo do tanque à mesma taxa de entrada. A quantidade $Q(t)$ de sal (em kg), presente na solução do tanque em cada instante de tempo t (em minutos), é dada pela função definida por $Q(t) = 100 - 90\,e^{-\frac{t}{200}}$. Considerando o exposto acima e aproximando o número irracional e por 2,7, assinale o que for **correto**.

01) No instante $t = 100$ minutos, a quantidade Q de sal no tanque não excede 55 kg.
02) Q é uma função decrescente.
04) A quantidade de sal no tanque no instante $t = -200\log_e\left(\frac{2}{3}\right)$ minutos é 40 kg.
08) Não há possibilidade de que a quantidade Q de sal no tanque chegue a ser igual a 20 vezes a quantidade inicial.
16) A concentração de sal $\left(\frac{Q(t)}{V}\right)$ presente na solução do tanque, com volume total V, no instante $t = 200$ minutos é menor que 0,04 kg/litro.

Questão 17

Assinale o que for **correto**, considerando o seguinte sistema de equações lineares nas variáveis reais x, y e z, em que m, a, b e c são constantes reais.

$$\begin{cases} mx + y = a - b \\ x + m^2 y + z = 2a + c \\ x + 4y + z = a + b + c \end{cases}$$

01) A regra de Cramer se aplica à resolução do sistema dado, quando m é um número real tal que $m \neq -2$, $m \neq 0$ e $m \neq 2$.
02) Se $m = 1$, existe uma única tripla (a, b, c) de modo que $x = y = z = 0$ seja a única solução do sistema.
04) Para $m = -1$, $a = b = 1$ e $c = -1$, a tripla $(2,\ 2,\ -3)$ é uma solução do sistema.
08) Se $m = 0$ e $a = b$, então o sistema é impossível.
16) Se $m = 2$ e $a = b = c = 3$, então $x = t$, $y = -2t$ e $z = 9 + 7t$, em que t é um número real, são soluções do sistema.

Rascunho

GABARITO 2

Questão 18

Considerando a tabela abaixo que fornece todos os valores de três funções $y = f(x)$, $y = g(x)$ e $y = h(x)$, assinale o que for **correto**.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-28	-9	-2	-1	0	7	26
$g(x)$	16	9	4	1	0	4	9
$h(x)$	9	7	5	3	1	-1	-3

01) $\dfrac{f^{-1}(-28) + 3g(-2)}{h(0)} = 8$.

02) O domínio da função composta $f \circ h$ é o conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$.

04) A representação gráfica da função g, em um sistema cartesiano ortogonal xOy, está sobre a curva $y = (x-1)^2$.

08) Existe apenas um valor de x tal que $g(x) = 9$.

16) A imagem da função F definida por $F(x) = [h(x)]^2 + f(x)$ é o conjunto $\{1, 6, 8, 17, 27, 40, 53\}$.

Questão 19

Assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) Toda solução x, sendo $x \neq 1$, da inequação $x > 2(x-1)$ é também solução da inequação $\dfrac{x}{x-1} > 2$.

02) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}} = 5^{\frac{7}{8}}$.

04) $\dfrac{3a^2 - 15a}{2a^3 - 8a^2 - 10a} = \dfrac{3}{a+1}$, em que a é um número real distinto de 0, de -1 e de 5.

08) Se a e b são números reais quaisquer tais que $a < b$, então $|a| < |b|$.

16) $7x^2 - 3x + 1 > 0$, para todo número real x.

Rascunho

Questão 20

Um funil de metal será construído para fins industriais. A parte superior do funil tem a forma de um tronco de cone circular reto e a inferior tem a forma de um cilindro circular reto, como mostra a figura A abaixo.

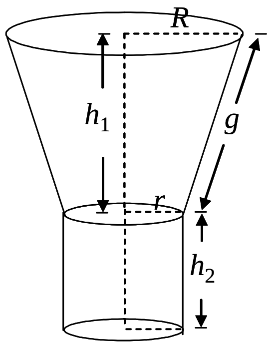


Figura A

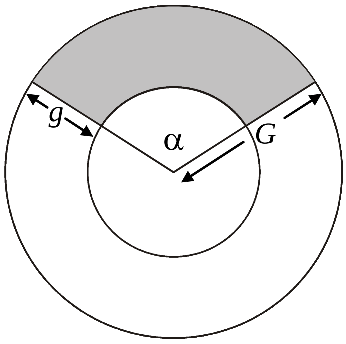


Figura B

O tronco de cone tem raio da base maior $R = 2\,\text{m}$, raio da base menor $r = 1\,\text{m}$ e altura $h_1 = 3\,\text{m}$. O cilindro tem altura $h_2 = 2\,\text{m}$. Planificando-se a parte superior do funil, obtém-se uma folha de metal com a forma de um setor de coroa circular com ângulo central igual a α radianos, de raio maior G (em metros) e tal que a diferença entre os raios maior e menor é igual a g (em metros), como ilustrado na figura B acima. Considerando o exposto, assinale o que for **correto**.

01) O cone reto que, quando seccionado por um plano paralelo à sua base, produz o tronco de cone da parte superior do funil tem altura $H = 6$ m.

02) A folha de metal, ilustrada na figura B, em forma de um setor de coroa circular tem raio maior $G = 2\sqrt{10}$ m e ângulo central $\alpha = \dfrac{2\pi}{\sqrt{10}}$ radianos.

04) A área da superfície da parte superior do funil é igual a 27 m^2.

08) A razão entre a capacidade volumétrica da parte superior do funil em relação à da parte inferior é igual a $\dfrac{9}{2}$.

16) A capacidade volumétrica do funil é $9\pi\,\text{m}^3$.

Rascunho

GABARITO 2

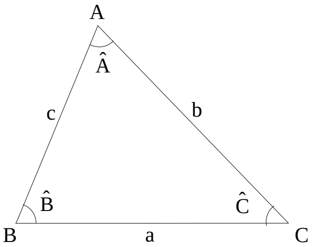
MATEMÁTICA – Formulário

Trigonometria

$\text{sen}(x \pm y) = \text{sen}(x)\cos(y) \pm \text{sen}(y)\cos(x)$

$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \text{sen}(x)\text{sen}(y)$

$\text{tg}(x \pm y) = \dfrac{\text{tg}(x) \pm \text{tg}(y)}{1 \mp \text{tg}(x)\text{tg}(y)}$



Lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})}$$

Lei dos cossenos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$

Análise Combinatória

$P_n = n!$

$A_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

$C_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, a^{n-i}\, b^i$

Geometria Plana e Espacial

Comprimento da circunferência: $C = 2\pi R$

Área do losango: $A = \dfrac{d\,D}{2}$

Área do trapézio: $A = \dfrac{(b+B)h}{2}$

Área do círculo: $A = \pi R^2$

Área lateral do cilindro: $A = 2\pi Rh$

Área do setor circular: $A = \dfrac{R^2\alpha}{2}$

Área lateral do cone: $A = \pi RG$

Área da superfície esférica: $A = 4\pi R^2$

Volume do cubo: $V = a^3$

Volume do prisma: $V = B \cdot h$

Volume da pirâmide: $V = \dfrac{B \cdot h}{3}$

Volume do cilindro: $V = \pi R^2 h$

Volume do cone: $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$

Volume da esfera: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Progressões

Progressão Aritmética (P. A.):

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Progressão Geométrica (P. G.):

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}, q \neq 1$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}, |q| < 1$$

Geometria Analítica

Área do triângulo de vértices $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ e $R(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2}|D|, \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $r: ax + by + c = 0$:

$$d_{P,r} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$