

Vestibular

UEM Inverno 2009

Prova 3 – Matemática

QUESTÕES OBJETIVAS

Nº DE ORDEM:
NOME DO CANDIDATO:

Nº DE INSCRIÇÃO:

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

- Confira os campos Nº DE ORDEM, Nº DE INSCRIÇÃO e NOME, conforme o que consta na etiqueta fixada em sua carteira.
- Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante na etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
- É proibido folhear o caderno de provas antes do sinal, às 9 horas.
- Após o sinal, confira se este caderno contém 40 questões objetivas (20 de cada matéria) e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
- O tempo mínimo de permanência na sala é de 2 h após o início da resolução da prova.
- No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluído o de preenchimento da Folha de Respostas.
- Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta correta será a soma dos números associados às proposições verdadeiras. Para cada questão, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma das proposições 01 e 08).
- Se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas constante nesta prova e destaque-o, para retirá-lo hoje, nesta sala, no horário das 13h15min às 13h30min, mediante apresentação do documento de identificação do candidato. Após esse período, não haverá devolução.
- Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas e o Rascunho para Anotação das Respostas.

09	13
	<input checked="" type="radio"/> 0
	<input type="radio"/> 1
	<input type="radio"/> 2
	<input type="radio"/> 3
	<input type="radio"/> 4
	<input type="radio"/> 5
	<input type="radio"/> 6
	<input type="radio"/> 7
	<input type="radio"/> 8
	<input type="radio"/> 9

Corte na linha pontilhada.

RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS

Nº DE ORDEM:

NOME:

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20



UEM – Comissão Central do Vestibular Unificado

GABARITO 1

Questão 01

Assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) O 4.º termo da progressão geométrica

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \frac{1}{\sqrt[6]{2}}, \dots \text{ é } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

02) A representação gráfica de uma progressão geométrica de razão q , sendo $q > 0$ e $q \neq 1$, está sobre uma curva exponencial.

04) A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética com termo geral $a_n = \frac{5n-4}{3}$, em que $n \geq 1$, é $\frac{5n-4}{18}$.

08) Não existe progressão geométrica de razão q , em que q é um número real, tal que $a_3 = -21$ e $a_7 = 168$.

16) O maior valor possível que pode ter a razão de uma progressão aritmética que contenha os números 13, 79 e 299 entre seus termos é 11.

Questão 02

Considerando a tabela abaixo que fornece todos os valores de três funções $y = f(x)$, $y = g(x)$ e $y = h(x)$, assinale o que for **correto**.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-28	-9	-2	-1	0	7	26
$g(x)$	16	9	4	1	0	4	9
$h(x)$	9	7	5	3	1	-1	-3

01) $\frac{f^{-1}(-28) + 3g(-2)}{h(0)} = 8$.

02) O domínio da função composta $f \circ h$ é o conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$.

04) A representação gráfica da função g , em um sistema cartesiano ortogonal xOy , está sobre a curva $y = (x-1)^2$.

08) Existe apenas um valor de x tal que $g(x) = 9$.

16) A imagem da função F definida por $F(x) = [h(x)]^2 + f(x)$ é o conjunto $\{1, 6, 8, 17, 27, 40, 53\}$.

Um funil de metal será construído para fins industriais. A parte superior do funil tem a forma de um tronco de cone circular reto e a inferior tem a forma de um cilindro circular reto, como mostra a figura A abaixo.

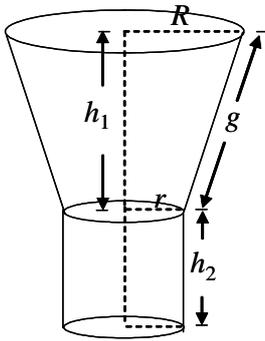


Figura A

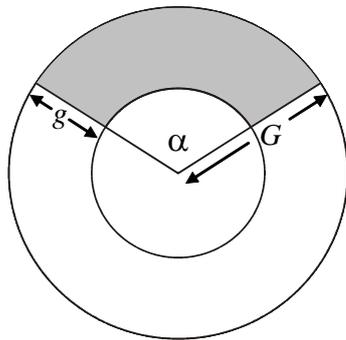


Figura B

O tronco de cone tem raio da base maior $R = 2$ m, raio da base menor $r = 1$ m e altura $h_1 = 3$ m. O cilindro tem altura $h_2 = 2$ m. Planificando-se a parte superior do funil, obtém-se uma folha de metal com a forma de um setor de coroa circular com ângulo central igual a α radianos, de raio maior G (em metros) e tal que a diferença entre os raios maior e menor é igual a g (em metros), como ilustrado na figura B acima. Considerando o exposto, assinale o que for **correto**.

- 01) O cone reto que, quando seccionado por um plano paralelo à sua base, produz o tronco de cone da parte superior do funil tem altura $H = 6$ m.
- 02) A folha de metal, ilustrada na figura B, em forma de um setor de coroa circular tem raio maior $G = 2\sqrt{10}$ m e ângulo central $\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{10}}$ radianos.
- 04) A área da superfície da parte superior do funil é igual a 27 m^2 .
- 08) A razão entre a capacidade volumétrica da parte superior do funil em relação à da parte inferior é igual a $\frac{9}{2}$.
- 16) A capacidade volumétrica do funil é $9\pi \text{ m}^3$.

Um terreno retangular em que a medida, em metros, do lado maior é o triplo da medida do lado menor será utilizado para a construção de um centro esportivo. Inicialmente, o terreno será cercado por muro e será construído o piso de uma quadra de esportes, que ocupa $\frac{2}{9}$ do terreno. Duas empresas A e B apresentam os orçamentos para a execução dessas obras, conforme esquema abaixo.

Empresa A: R\$ 18,00 por metro quadrado de piso, R\$ 50,00 por metro linear de muro e R\$ 500,00 de taxa de administração.

Empresa B: R\$ 24,00 por metro quadrado de piso, R\$ 40,00 por metro linear de muro, não cobrando taxa de administração.

Considerando o exposto acima e indicando por x a medida em metros do lado menor do terreno, assinale o que for **correto**.

- 01) A área da quadra de esportes, em função da medida x , é $\frac{4x^2}{27} \text{ m}^2$.
- 02) No orçamento da empresa A, o custo C das obras, em função da medida x metros, é $C(x) = 12x^2 + 400x + 500$ reais.
- 04) Para um terreno com 1200 m^2 de área, o orçamento apresentado pela empresa A excede em 20% o orçamento apresentado pela empresa B.
- 08) O orçamento apresentado pela empresa A é mais vantajoso quando o perímetro do terreno é maior do que 200 m.
- 16) Se a empresa A não cobrar taxa de administração, seu orçamento sempre será menor que o orçamento apresentado pela empresa B.

Questão 05

Rascunho

Assinale o que for **correto**, considerando o seguinte sistema de equações lineares nas variáveis reais x , y e z , em que m , a , b e c são constantes reais.

$$\begin{cases} mx + y = a - b \\ x + m^2y + z = 2a + c \\ x + 4y + z = a + b + c \end{cases}$$

- 01) A regra de Cramer se aplica à resolução do sistema dado, quando m é um número real tal que $m \neq -2$, $m \neq 0$ e $m \neq 2$.
- 02) Se $m = 1$, existe uma única tripla (a, b, c) de modo que $x = y = z = 0$ seja a única solução do sistema.
- 04) Para $m = -1$, $a = b = 1$ e $c = -1$, a tripla $(2, 2, -3)$ é uma solução do sistema.
- 08) Se $m = 0$ e $a = b$, então o sistema é impossível.
- 16) Se $m = 2$ e $a = b = c = 3$, então $x = t$, $y = -2t$ e $z = 9 + 7t$, em que t é um número real, são soluções do sistema.

Questão 06

Em uma pesquisa com um grupo de 1.800 homens e 1.200 mulheres sobre suas preferências entre os produtos das marcas A, B e C, foram obtidos os dados registrados na tabela a seguir.

Marca	HOMENS	MULHERES
A	30%	40%
B	35%	25%
C	35%	35%

Com relação aos dados informados, assinale o que for **correto**.

- 01) 70% do total de pessoas pesquisadas preferem a marca A.
- 02) As marcas A e C têm a mesma preferência no grupo pesquisado.
- 04) Escolhida ao acaso uma pessoa do grupo pesquisado, a probabilidade de que seja do sexo masculino é $\frac{3}{5}$.
- 08) Escolhida ao acaso uma pessoa do grupo pesquisado, a probabilidade de que seja do sexo masculino e prefira a marca A é 18%.
- 16) O número de mulheres e de homens que escolheu a marca C é o mesmo.

Questão 07

Rascunho

Um tanque contém 10 kg de sal dissolvidos em 2000 litros de água. Uma mistura de água com o mesmo tipo de sal entra no tanque e é misturada de modo que se mantenha homogênea, saindo do tanque à mesma taxa de entrada. A quantidade $Q(t)$ de sal (em kg), presente na solução do tanque em cada instante de tempo t (em minutos), é dada pela função definida por

$Q(t) = 100 - 90e^{-\frac{t}{200}}$. Considerando o exposto acima e aproximando o número irracional e por 2,7, assinale o que for **correto**.

- 01) No instante $t = 100$ minutos, a quantidade Q de sal no tanque não excede 55 kg.
- 02) Q é uma função decrescente.
- 04) A quantidade de sal no tanque no instante $t = -200 \log_e \left(\frac{2}{3} \right)$ minutos é 40 kg.
- 08) Não há possibilidade de que a quantidade Q de sal no tanque chegue a ser igual a 20 vezes a quantidade inicial.
- 16) A concentração de sal $\left(\frac{Q(t)}{V} \right)$ presente na solução do tanque, com volume total V , no instante $t = 200$ minutos é menor que 0,04 kg/litro.

Questão 08

Com relação aos números complexos, assinale o que for **correto**.

- 01) $(2 + 2i)^6$ é um número imaginário puro.
- 02) $z = \frac{i^{103}}{1+i}$ é um número cujo módulo é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 04) Se $\frac{z+2i}{iz+1} = 3$, então $z = \frac{9+7i}{10}$.
- 08) O ponto, no plano complexo, correspondente ao número complexo $z = \frac{i^{103}}{1+i}$ está localizado no 4.º quadrante.
- 16) $8 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$ é a forma trigonométrica do número complexo $z = -4\sqrt{3} - 4i$.

Questão 09

Considerando, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, os pontos $A(-7,5)$, $B(-2,0)$, $C(3,5)$ e $D(3,15)$, assinale o que for **correto**.

- 01) O triângulo de vértices A , B e C é equilátero.
 02) A equação da reta perpendicular ao segmento \overline{AD} e que contém C é $y = \frac{2}{5}x + \frac{19}{5}$.
 04) O quadrilátero $ABCD$ tem área igual a 75 unidades de área.
 08) O ângulo \widehat{BAD} do quadrilátero $ABCD$ mede 60° .
 16) O quadrilátero $ABCD$ é um trapézio.

Questão 10

Assinale o que for **correto**.

- 01) Se a é um número real positivo e $a \neq 1$, então $\log_a \left(\log_a \frac{1}{a^a} \right) = -1$.
 02) $\log_{\frac{1}{3}} 3 < \log_3 \frac{1}{2}$.
 04) $\left(\frac{3}{4} \right)^{2x+7} < \left(\frac{4}{3} \right)^{x-4}$ para todo $x > -1$.
 08) Sendo $f(x) = 3^{2x+5}$ e a e b números reais satisfazendo $f(a-1) = 9f(b)$, então $a-b = 2$.
 16) As soluções da equação $1 + \log_{10}(x+1) = \log_{10}(x^2-14)$ são $x = -2$ e $x = 12$.

Questão 11

Assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

- 01) Toda solução x , sendo $x \neq 1$, da inequação $x > 2(x-1)$ é também solução da inequação $\frac{x}{x-1} > 2$.
 02) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}} = 5^{\frac{7}{8}}$.
 04) $\frac{3a^2-15a}{2a^3-8a^2-10a} = \frac{3}{a+1}$, em que a é um número real distinto de 0, de -1 e de 5.
 08) Se a e b são números reais quaisquer tais que $a < b$, então $|a| < |b|$.
 16) $7x^2 - 3x + 1 > 0$, para todo número real x .

Questão 12

Rascunho

Assinale o que for **correto**.

01) Se $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\sin 2\alpha = \frac{12}{25}$.

02) Se $a = 10$ cm e $b = 20$ cm são as medidas de dois lados de um paralelogramo de área $100\sqrt{2}$ cm², então a medida do menor ângulo formado por esses dois lados é igual a 60° .

04) Sendo α e β arcos do primeiro quadrante tais que $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ e $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, então $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

08) Um triângulo ABC em que os lados AB e AC medem, respectivamente, 8 cm e 6 cm e o ângulo \widehat{BAC} mede 60° tem o lado BC medindo $2\sqrt{13}$ cm.16) Se A , B e C , nas condições da alternativa anterior, representam cidades em um mapa feito na escala 1 cm : 50.000 cm, então, em linha reta, as cidades B e C distam mais que 3 km uma da outra.**Questão 13**As afirmações abaixo dizem respeito aos tópicos de trigonometria e funções trigonométricas. Assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) $(\sin 2x)(\sin x) + 2\cos^3 x = 2\cos x$ para todo número real x .

02) O único valor de $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x$ é

$$x = \frac{\pi}{4}.$$

04) Não existe valor real para x tal que $2\cos^2 x + 7\cos x = -6$.

08) A função f definida por $f(x) = \sin(4x - \pi)$, em que $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, é injetora.

16) Se, em um triângulo retângulo, o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo agudo θ medem, respectivamente, $\sqrt{40}$ cm e 10 cm, então $\cos \theta > \frac{5}{6}$.

Questão 14

Considerando os números 60, 110 e 126, assinale o que for **correto**.

- 01) 2 é o único divisor positivo par de 110.
02) A soma dos números primos positivos que são simultaneamente divisores de 60 e de 126 é igual a 5.
04) A soma dos divisores positivos do número 110 é igual a 216.
08) O mínimo múltiplo comum entre 60 e 110 é 6600.
16) O máximo divisor comum entre 60 e 126 é 6.

Questão 15

Considerando, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy , um triângulo equilátero ABC em que A e B são dados, respectivamente, por $(0,0)$ e $(6,0)$ e o ponto C está localizado no primeiro quadrante, assinale o que for **correto**.

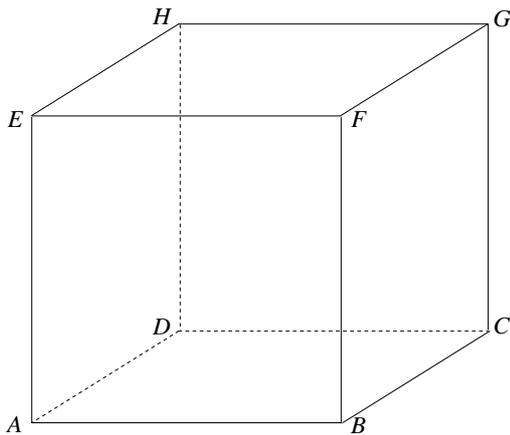
- 01) A altura do triângulo ABC , em relação à base AB , é $3\sqrt{3}$ unidades de comprimento.
02) A reta que contém a aresta \overline{AC} satisfaz a equação $y = \frac{1}{2}x$.
04) As circunferências C_1 e C_2 , cujas equações são, respectivamente, $x^2 + y^2 = 9$ e $(x - 3)^2 + (y - 3\sqrt{3})^2 = 9$, tangenciam-se no ponto médio do segmento \overline{AC} .
08) A circunferência C_3 de equação $(x - 6)^2 + y^2 = 27$ tem centro em um dos vértices do triângulo ABC e raio igual ao comprimento de uma mediana desse triângulo.
16) As abscissas dos pontos de interseção das circunferências C_1 e C_3 , referidas nos itens acima, são iguais a $\frac{1}{2}$.

Rascunho

Questão 16

Rascunho

Considerando o cubo $ABCDEFGH$ representado na figura abaixo, assinale o que for **correto**.



- 01) A reta determinada pelos vértices H e F e a reta determinada pelos vértices A e B são reversas.
- 02) O tetraedro determinado pelos vértices A, B, D e H e o tetraedro determinado pelos vértices A, B, C e H têm o mesmo volume.
- 04) A reta determinada pelos vértices A e C é paralela ao plano determinado pelos vértices E, H e F .
- 08) O triângulo determinado pelos vértices D, E e F é retângulo.
- 16) A seção determinada no cubo pelo plano que contém os vértices A, B e G é um quadrado.

Questão 17

Assinale o que for **correto**, considerando as matrizes

$A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que os elementos a_{ij} e b_{ij} são números reais, para $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 3$.

- 01) Se A é tal que seus elementos a_{ij} são definidos por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}, \text{ para } 1 \leq i \leq 3 \text{ e } 1 \leq j \leq 3, \text{ então}$$

$$A \cdot B = B.$$

- 02) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.

- 04) Se B é a matriz inversa da matriz A , então $b_{ij} = \frac{1}{a_{ij}}$,

$$\text{para } 1 \leq i \leq 3 \text{ e } 1 \leq j \leq 3.$$

- 08) Se $b_{ij} = i + j$, para $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 3$, então $B^t = B$.

- 16) Se $b_{ij} = i - j$, para $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 3$, então $\det B = 0$.

Questão 18

Uma empresa é solicitada para realizar uma pesquisa de campo e, para tal, deve escolher uma equipe de trabalho com 4 pessoas dentre 12 funcionários, dos quais 7 são homens e 5 são mulheres. Com uma jornada diária de 6 horas de trabalho, a equipe compromete-se a entregar os resultados da pesquisa em 20 dias. Sobre o exposto, assinale o que for **correto**.

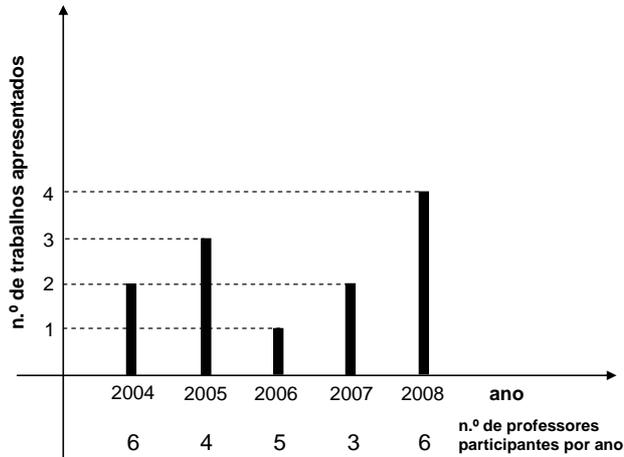
- 01) Há 495 possibilidades de escolhas diferentes de uma equipe de trabalho.
- 02) Há 35 possibilidades de escolhas de uma equipe constituída apenas por homens.
- 04) Há 210 possibilidades de escolhas para uma equipe constituída por 2 homens e por 2 mulheres.
- 08) Se, a partir do 18.º dia, a equipe é obrigada a diminuir sua jornada diária para 4 horas, o prazo de entrega deverá ser aumentado em 3 dias.
- 16) Se a empresa contratante exigisse o prazo de 18 dias para a entrega da pesquisa, a jornada diária da equipe, composta de quatro pessoas, deveria ser de 6 horas e 40 minutos.

Questão 19

Considerando o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que a , b e c são números reais quaisquer, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

- 01) Se $q(x)$ for um polinômio de grau 2, então $q(x) \cdot p(x)$ será um polinômio de grau 6.
- 02) Se $a = b = 0$ e $c = 8$, então -2 é a única raiz real do polinômio p .
- 04) Sempre existem constantes reais k , l e m tais que $p(x) = (x - k)(x - l)(x - m)$.
- 08) Se $p(x)$ é divisível por $(x - 1)$, então $1 + a = -b - c$.
- 16) Se $p(-x) = -p(x)$ para qualquer número real x e $p(-1) = 0$, então $p(0) = 0$ e $p(2) = 6$.

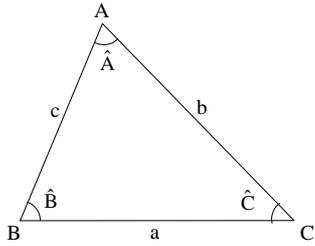
Sobre a participação de professores de uma Universidade em um evento científico que acontece anualmente e sobre o número de trabalhos apresentados por alguns professores, considere a figura abaixo.



Com relação aos dados representados na figura, assinale o que for **correto**.

- 01) Sobre os números anuais de professores participantes no evento nos anos de 2004 a 2008, a média é maior do que 5.
- 02) Em relação ao número de trabalhos apresentados nos anos de 2004 a 2008, a média é maior do que a mediana.
- 04) O número de trabalhos apresentados no ano de 2008 corresponde a $\frac{1}{3}$ do número total de trabalhos apresentados no período 2004-2008.
- 08) Quanto ao número de trabalhos apresentados de 2005 para 2006, houve uma redução de mais de 60%.
- 16) A razão entre o número de trabalhos apresentados e o número de professores participantes em 2005 é maior do que essa razão em 2008.

MATEMÁTICA – Formulário

<p>Trigonometria</p>	$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$ $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg}(x) \pm \operatorname{tg}(y)}{1 \mp \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$	 <p><i>Lei dos senos:</i></p> $\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$ <p><i>Lei dos cossenos:</i></p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$
<p>Análise Combinatória</p>	$P_n = n!$ $A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$	$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_{n,i} a^{n-i} b^i$
<p>Geometria Plana e Espacial</p>	<p>Comprimento da circunferência: $C = 2\pi R$</p> <p>Área do losango: $A = \frac{d D}{2}$</p> <p>Área do trapézio: $A = \frac{(b + B)h}{2}$</p> <p>Área do círculo: $A = \pi R^2$</p> <p>Área lateral do cilindro: $A = 2\pi R h$</p> <p>Área do setor circular: $A = \frac{R^2 \alpha}{2}$</p> <p>Área lateral do cone: $A = \pi R G$</p> <p>Área da superfície esférica: $A = 4\pi R^2$</p>	<p>Volume do cubo: $V = a^3$</p> <p>Volume do prisma: $V = B \cdot h$</p> <p>Volume da pirâmide: $V = \frac{B \cdot h}{3}$</p> <p>Volume do cilindro: $V = \pi R^2 h$</p> <p>Volume do cone: $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$</p> <p>Volume da esfera: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$</p>
<p>Progressões</p>	<p>Progressão Aritmética (P. A.):</p> $a_n = a_1 + (n-1)r$ $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$	<p>Progressão Geométrica (P. G.):</p> $a_n = a_1 q^{n-1}$ $S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q}, q \neq 1$ $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, q < 1$
<p>Geometria Analítica</p>	<p>Área do triângulo de vértices $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ e $R(x_3, y_3)$:</p> $A = \frac{1}{2} D , \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$	<p>Distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $r: ax + by + c = 0$:</p> $d_{P,r} = \left \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right $