VESTIBULAR
UEM VERÃO 2008

Prova 3 – Matemática

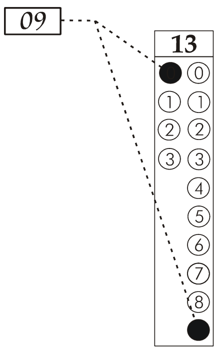
QUESTÕES OBJETIVAS

N.º DE ORDEM: **N.º DE INSCRIÇÃO:**

NOME DO CANDIDATO:

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

1. Confira os campos N.º DE ORDEM, N.º DE INSCRIÇÃO e NOME, conforme o que consta na etiqueta fixada em sua carteira.
2. Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante na etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
3. É proibido folhear o caderno de provas antes do sinal, às 9 horas.
4. Após o sinal, confira se este caderno contém 40 questões objetivas (20 de cada matéria) e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
5. O tempo mínimo de permanência na sala é de 1h e 30min após o início da prova.
6. No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluído o de preenchimento da Folha de Respostas.
7. Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta será a soma dos números associados às alternativas corretas. Para cada questão, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma das alternativas 01 e 08).
8. Se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas constante nesta prova e destaque-o, para retirá-lo hoje, nesta sala, no horário das 13h15min às 13h30min, mediante apresentação do documento de identificação do candidato. Após esse período, não haverá devolução.
9. Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas e o Rascunho para Anotação das Respostas.



Corte na linha pontilhada.

RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS

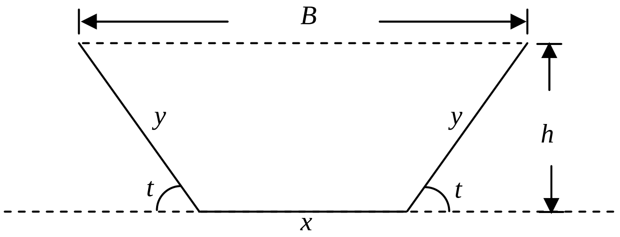
N.º DE ORDEM: **NOME:**

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

MATEMÁTICA

INSTRUÇÃO: as questões 01 e 02 dizem respeito ao conteúdo exposto a seguir.

Uma calha para drenagem de água é construída usando-se uma chapa metálica retangular medindo $60\,\text{cm} \times 20\,\text{m}$, dobrada no sentido longitudinal. A seção transversal da calha é mostrada na figura.



O ângulo $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$ é medido a partir da reta horizontal que contém a base da seção da calha e as medidas *x* e *y* satisfazem à equação $x + 2y = 60$ cm.

Questão 01

Considerando o conteúdo exposto anteriormente e supondo que $x = y$, que a medida de B é $40\,\text{cm}$, que $\sqrt{3} \simeq 1,7$ e que $\pi = 3,1$, assinale o que for **correto**.

01) A medida do ângulo *t* é $\frac{\pi}{6}$ radianos.

02) O volume suportado pela calha é $1\,\text{m}^3$, desprezando-se as frações do metro cúbico.

04) O volume suportado pela calha é equivalente ao volume total de 4 reservatórios com o formato de cubos com arestas medindo 50 cm.

08) A área da seção transversal da calha é igual à de um círculo cujo diâmetro mede exatamente 20 cm.

16) Em caso de entupimento na saída da calha e considerando que a mesma receba água a uma vazão de 30 litros por minuto, ocorrerá transbordamento antes que decorram 35 minutos.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 02

Sobre o conteúdo exposto anteriormente, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) Se $x = y$ e $t = \frac{\pi}{2}$, a área da seção transversal da calha é $0,4\,m^2$.
02) Se $x = y$, o comprimento de B é dado por $B = 20(1 + 2\cos t)$ cm.
04) Se $x = y$, a área da seção transversal da calha em termos de t, em cm^2, é representada pela função real f, sendo $f(t) = 200(2\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t)$.
08) Se $x = y$, a área da seção transversal da calha para $t = \frac{\pi}{6}$ é menor do que a área da seção transversal para $t = \frac{\pi}{2}$.
16) Se t for fixado, a altura da calha em termos de x, em cm, é dada pela função $h(x) = (60 - x)\operatorname{sen} t$, $0 < x < 60$.

Questão 03

Inscrevem-se, em uma esfera de raio $R > 0$, dois cones circulares retos tendo como base comum um círculo de raio $r > 0$ e vértices diametralmente opostos. Seja x a distância do centro da esfera ao centro da base dos cones. Com essas considerações, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) x pode assumir todos os valores no intervalo $[0, R)$.
02) Se $x = 0$, a soma dos volumes dos cones é $\frac{1}{4}$ do volume da esfera.
04) A razão do volume do cone maior para o volume do cone menor é expresso por $\frac{R+x}{R-x}$, sendo $x > 0$.
08) Se $x = \frac{R}{2}$, o volume do cone maior é o dobro do volume do cone menor.
16) A soma dos volumes dos cones não excede o volume de um hemisfério da esfera.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 04

Considere os números complexos $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3})$ e $z_2 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6})$ e as suas representações no plano complexo xOy. Considere ainda que, se z é um número complexo, então $\overline{z}$ representa o seu conjugado. Sobre o exposto, é **correto** afirmar que

01) $|\overline{z_1}| = |\overline{z_2}|$.

02) $(z_1)^7 = 32(z_2)^2$.

04) z_1 e z_2 pertencem à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2$.

08) z_1 é solução da equação $z^2 - 2z + 4 = 0$.

16) a medida do segmento que une z_1 e z_2 é $(1+\sqrt{3})$ unidades de comprimento.

Questão 05

Considere os números naturais colocados ordenadamente em linhas da disposição triangular mostrada na figura e suponha que a distribuição continue, indefinidamente, obedecendo ao mesmo padrão.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & 3 & 4 & & & \\
 & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & \\
 & 10 & 11 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Sobre o exposto, é **correto** afirmar que

01) a coluna central não contém números compostos.

02) a linha de ordem k contém $(2k-1)$ números naturais, $k = 1, 2, \ldots$

04) a quantidade de números naturais escritos até o final da linha k é k^2, $k = 1, 2, \ldots$

08) a soma de todos os números naturais escritos até o final da 20.ª linha é 80.200.

16) o número natural 628 é o quarto número da 26.ª linha.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 06

Considere uma função $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a + \log_b x$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $b \neq 1$ e satisfazendo às condições $f(2) = 0$ e $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$. Assinale o que for **correto**.

01) Os valores de *a* e *b* satisfazem à equação $2.b^a = 1$.

02) $f(x) = \log_{10} \frac{x}{2}$.

04) $f(xy) = f(x) + f(2y)$.

08) $f(10^x) = x$.

16) O gráfico da função f^{-1}, a inversa de f, contém os pontos $(0, \frac{1}{2})$ e $(-1, 5)$.

Questão 07

Seja $y = f(x)$ uma função real de uma variável real cujo domínio é o intervalo $[-4, 5]$ e cuja imagem é o intervalo $[-2, \frac{9}{4}]$. O gráfico de *f*, após ter sido traçado em sistema de coordenadas cartesianas, pode ser percorrido inteiramente com a ponta de um lápis, sem levantá-lo da folha de papel, e é constituído pelos seguintes elementos geométricos:

(*i*) a porção não-negativa da parábola que contém o ponto de coordenadas $(-3, 0)$ e cujo vértice é o ponto de coordenadas $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$;

(*ii*) dois segmentos de reta disjuntos, ambos de comprimento $\sqrt{5}$ e com inclinações -2;

(*iii*) um segmento de reta perpendicular a um dos segmentos do item (*ii*), de comprimento $2\sqrt{5}$ e tendo um extremo com ordenada igual a zero.

Com relação a essa função, assinale o que for **correto**.

01) $f(x) = -2x$, se $x \in [-4, -3)$.

02) Se $0 \leq x \leq 5$, então $-2 \leq f(x) \leq 0$.

04) $f(x) = 1$ para exatamente três distintos valores de *x*.

08) $f(x)$ atinge o valor mínimo em $x = 0$.

16) *f* é injetora no intervalo $[-\frac{3}{2}, 0]$.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 08

Considere um número complexo $z = x + yi$, tal que o número complexo $w = \frac{z}{\bar{z}}$ exista, sendo $\bar{z}$ o conjugado de z. Assinale o que for **correto**.

01) $w = \frac{(x^2 + y^2) + 2xyi}{x^2 - y^2}$, em que $y \neq |x|$.

02) Se $|x| = |y|$, então w será um número imaginário puro.

04) Se $x = -2$ e $y = -1$, então w terá uma representação geométrica no 1.º quadrante.

08) A condição sob a qual w tem a parte real positiva pode ser expressa por $x > \pm y$.

16) w será um número real, apenas se z for um número real.

Questão 09

Uma pessoa efetua uma compra cujo valor bruto é R$ 2.000,00, aceitando quitá-la em 10 prestações mensais, sem entrada. O valor de cada prestação é constituído por $\frac{1}{10}$ do valor bruto da compra acrescido de 5% de juros ao mês cobrados sobre o saldo devedor D_n, calculado por $D_n = 2000\left(1 - \frac{n-1}{10}\right)$, $n = 1, 2, \ldots, 10$. O pagamento da primeira prestação ocorrerá 30 dias após a compra. Suponha que todos os pagamentos serão efetuados sem atraso. Sobre o exposto, assinale o que for **correto**.

01) O valor da 3.ª prestação é R$ 280,00.

02) O valor médio de cada prestação é R$ 250,00.

04) O juro total a ser pago não ultrapassa 25% do valor da compra.

08) Existe uma prestação cujo valor é exatamente o valor médio das prestações.

16) Para o cálculo do valor da n.ª prestação a ser paga, pode-se usar a seguinte relação funcional: $f(n) = 300 - 10(n-1)$, $n = 1, \ldots, 10$.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 10

Assinale o que for **correto**.

01) $12^3 \times 9^2 = 3 \times 6^6$.

02) $\left(\dfrac{x^2}{2(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{2(x^2+1)} \right) = \dfrac{1}{2(x^2+1)^2}$.

04) Se $A = [-3,0]$ e $B = [-1,5]$ são intervalos da reta real, então $A \cap B = \{0,1\}$.

08) $10 \times \sqrt{10} \times \sqrt{\sqrt{10}} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} \times \ldots = 100$.

16) $\left(\dfrac{1}{20000} - (0,1)^2 \times 0,003 \right)^2 = 4 \times 10^{-10}$.

Questão 11

Se o polinômio $p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12$ apresenta o número complexo $z = 2i$ como um dos seus zeros, então é **correto** afirmar que

01) a equação $p(x) = 0$ apresenta 3 raízes reais.

02) a soma das raízes de $p(x) = 0$ é -2 e o produto é -12.

04) dois dos zeros de $p(x)$ são soluções da equação $x^2 + 2x - 3 = 0$.

08) $p(x)$ é divisível por $x^2 - 4$.

16) os gráficos dos polinômios $-p(x)$ e $p(x)$ apresentam as mesmas interseções com os eixos coordenados.

Questão 12

Assinale o que for **correto** com respeito às matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a+1 \\ a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, sendo *a*, *b*, *x*, *y* e *z* números reais.

01) *A* não é uma matriz nula.

02) Se $a \neq 0$, então *A* possui inversa.

04) Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então a equação matricial $A.X = B$ possui uma única solução.

08) Se $a = -1$, então a equação matricial $A.X = B$ não possui solução.

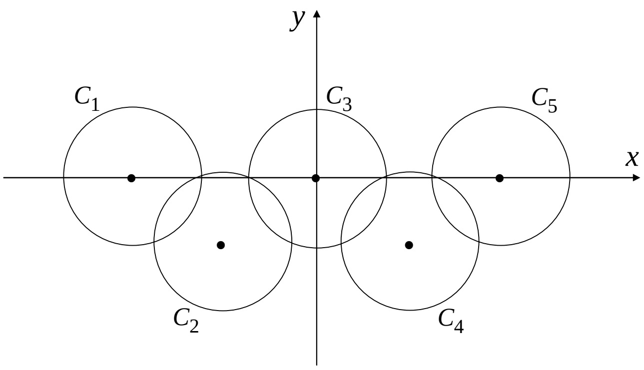
16) Se $A^2 = A$, então $a = 0$ e $b = 1$.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 13

A figura abaixo ilustra o símbolo olímpico representado em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.



As cinco circunferências C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 têm todas raios iguais a 3cm. C_3 é centrada na origem do sistema e C_1 e C_5 têm os centros no eixo das abscissas eqüidistantes da origem. Os centros de C_2 e C_4 têm mesma ordenada negativa e situam-se a $2\sqrt{6}\text{ cm}$ da origem. As circunferências C_2 e C_3 interceptam-se em dois pontos, sendo um deles de coordenadas $(-3, 0)$. Com relação ao exposto, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) A equação reduzida da circunferência C_2 é $(x+4)^2+(y+2\sqrt{2})^2=9$.

02) Os centros de C_2 e C_4 estão a $2\sqrt{2}\text{ cm}$ do eixo das ordenadas.

04) O par de coordenadas de um dos pontos de interseção das circunferências C_3 e C_4 é $(3,-2\sqrt{2})$.

08) O ponto de coordenadas $(-10, \sqrt{5})$ pertence a uma das circunferências do símbolo olímpico.

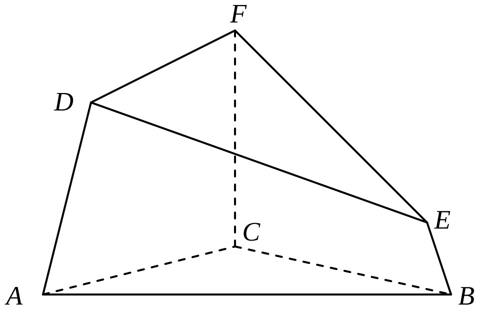
16) A circunferência C_5 pode ser descrita pela equação $x^2-16x+y^2+54=0$.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 14

O sólido *S*, ilustrado na figura abaixo, foi obtido seccionando-se uma pirâmide não regular, por um plano não paralelo à base da mesma, subtraindo-se a porção que contém o vértice. Com essas considerações, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.



01) Os planos que contêm as faces laterais do sólido *S* interceptam-se em um ponto.
02) Os planos que contêm as faces *ABC* e *DEF* interceptam-se em apenas um ponto.
04) A reta suporte da aresta *DF* não intercepta o plano que contém a face *ABC*.
08) Não existe um plano que contenha as retas suportes das arestas *AC* e *DE*.
16) A aresta *EB* é perpendicular a alguma reta do plano que contém a face *ABC*.

Questão 15

Um certo triângulo *ABC* satisfaz à seguinte condição: $\operatorname{sen}\widehat{A} = 2\operatorname{sen}\widehat{B}\cos\widehat{C}$ (I), em que $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são, respectivamente, os ângulos $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCA}$ do triângulo, e apenas $\widehat{A}$ pode ser um ângulo reto. Assinale o que for **correto**.

01) A condição (I) é válida para todo triângulo isósceles, retângulo em $\widehat{A}$.
02) A condição (I) pode ser escrita como $\operatorname{sen}(\widehat{B}+\widehat{C}) = 2\operatorname{sen}\widehat{B}\cos\widehat{C}$.
04) A condição (I) pode ser escrita como $\operatorname{tg}\widehat{B} = \operatorname{tg}\widehat{C}$.
08) O triângulo *ABC* é isósceles.
16) Todo triângulo isósceles satisfaz à condição (I).

Rascunho

GABARITO 3

Questão 16

Considere, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, os pontos $A(0,0)$, $B(0,5)$ e $C(a,2a)$, em que $a>0$, e assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) O triângulo ABC pode ser eqüilátero.

02) A reta de equação $y=-\frac{1}{2}x+20$ é perpendicular à reta que contém os pontos A e C.

04) Se $a=2$, então o triângulo ABC é retângulo.

08) Se a área do triângulo ABC mede 10 unidades de área, então C tem coordenadas $(5,10)$.

16) Se D é um ponto tal que $ABCD$ seja um losango, então as coordenadas de D são $(4,3)$.

Questão 17

Uma fábrica necessita diminuir o tempo de empacotamento de sua produção diária. Para isso, adquire uma nova máquina com a capacidade de empacotar sua produção diária em 2 horas. A máquina antiga, para o mesmo trabalho, emprega 3 horas. Assinale o que for **correto**.

01) As duas máquinas juntas empacotam, em 1 hora, $\frac{5}{6}$ da produção diária.

02) As duas máquinas juntas levam 1 hora e dois minutos para empacotar a produção diária.

04) Se a fábrica triplicar a produção diária, as duas máquinas juntas realizarão o trabalho de empacotamento em 4 horas.

08) Fazendo as duas máquinas operarem juntas durante 6 horas diárias, a fábrica poderá multiplicar a sua produção diária por 5.

16) Se a meta da fábrica fosse, com duas máquinas, empacotar a produção diária em 1 hora, deveria ter comprado uma máquina que empacotasse sua produção diária em 1 hora e 45 minutos.

Rascunho

GABARITO 3

Questão 18

Considere o seguinte sistema de equações lineares de incógnitas reais x e y em que k, m e n são constantes reais:

$$\begin{cases} 6x + ky = 15 \\ mx + y = -3 \\ 2x + y = n \end{cases}$$

Com respeito ao sistema, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

01) Se $n = 5$, o sistema pode ter infinitas soluções.
02) Se $m = 2$, o sistema não possui solução.
04) Se $n = -3$, $m = 2$ e $k \neq 3$, o sistema possui uma única solução.
08) O sistema dado não é homogêneo.
16) O par ordenado $(0, 0)$ é solução do sistema para convenientes valores de k, m e n.

Questão 19

Considere o desenvolvimento binomial do binômio $(x - y)^{11}$, ordenado em potências decrescentes de x, para assinalar a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

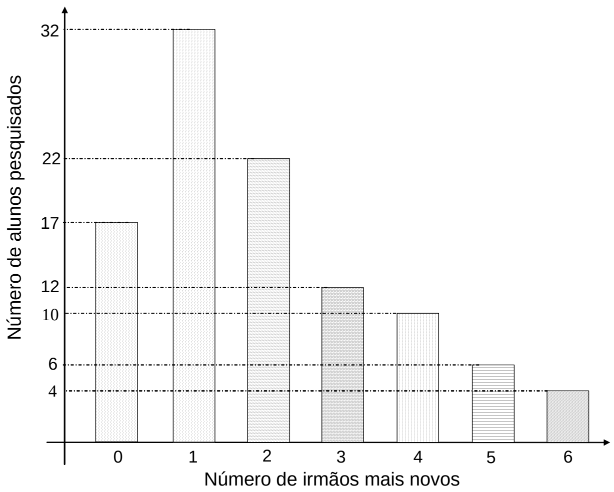
01) A soma dos valores absolutos dos coeficientes do desenvolvimento dado é igual à soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(|x| - |y|)^{11}$.
02) A soma dos coeficientes dos termos em potências pares de x é 2^{10}.
04) Existem 55 maneiras de escolher ao acaso uma dupla de coeficientes do desenvolvimento do binômio.
08) Escolhendo-se ao acaso uma dupla de coeficientes do desenvolvimento do binômio, a probabilidade de que a soma desses coeficientes seja zero é $\frac{1}{11}$.
16) Escolhendo-se ao acaso uma dupla de coeficientes do desenvolvimento do binômio, a probabilidade de que o produto desses coeficientes seja positivo é $\frac{5}{11}$.

Rascunho

GABARITO 3

Questão **20**

Uma escola realiza uma pesquisa junto a todos os seus alunos da quinta série para saber a existência de irmãos mais novos na família e obteve os dados mostrados no gráfico abaixo.



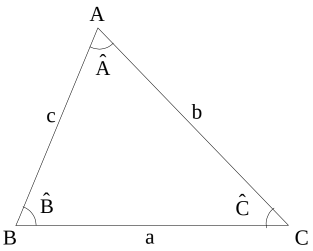
Sobre os alunos matriculados na quinta série dessa escola, assinale o que for **correto**.

01) O número total de crianças matriculadas na quinta série dessa escola com pelo menos um irmão mais novo é 86.
02) O número mediano de irmãos mais novos é 1.
04) O número médio de irmãos mais novos é 2.
08) O percentual de alunos com mais de três irmãos mais novos é exatamente 20%.
16) Excluindo-se a primeira barra do gráfico, o número médio de irmãos mais novos diminui.

Rascunho

GABARITO 3

MATEMÁTICA – Formulário

Trigonometria	$\text{sen}(x \pm y) = \text{sen}(x)\cos(y) \pm \text{sen}(y)\cos(x)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \text{sen}(x)\text{sen}(y)$ $\text{tg}(x \pm y) = \dfrac{\text{tg}(x) \pm \text{tg}(y)}{1 \mp \text{tg}(x)\text{tg}(y)}$	 *Lei dos senos:* $\dfrac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \dfrac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \dfrac{c}{\text{sen}(\hat{C})}$ *Lei dos cossenos:* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$
Análise Combinatória	$P_n = n!$ $A_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$	$C_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, a^{n-i} b^i$
Geometria Plana e Espacial	Área do losango: $A = \dfrac{d\,D}{2}$ Área do trapézio: $A = \dfrac{(b+B)h}{2}$ Área do círculo: $A = \pi R^2$ Área lateral do cilindro: $A = 2\pi R h$ Área lateral do cone: $A = \pi R g$ Área da superfície esférica: $A = 4\pi R^2$	Volume do cubo: $V = a^3$ Volume do prisma: $V = B \cdot h$ Volume da pirâmide: $V = \dfrac{B \cdot h}{3}$ Volume do cilindro: $V = \pi R^2 h$ Volume do cone: $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$ Volume da esfera: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$
Progressões	Progressão Aritmética (P. A.): $a_n = a_1 + (n-1)r$ $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$	Progressão Geométrica (P. G.): $a_n = a_1 q^{n-1}$ $S_n = \dfrac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}, q \neq 1$ $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}, \vert q \vert < 1$
Geometria Analítica	Área do triângulo de vértices $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ e $R(x_3, y_3)$: $A = \dfrac{1}{2}\vert D \vert$, onde $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$	Distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $r: ax + by + c = 0$: $d_{P,r} = \left\vert \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\vert$