

VESTIBULAR

UEM VERÃO 2008

Prova 3 – Matemática

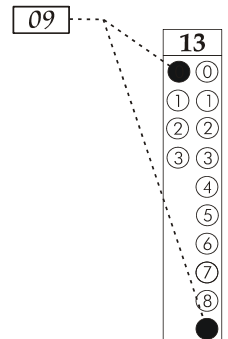
QUESTÕES OBJETIVAS

Nº DE ORDEM:
NOME DO CANDIDATO:

Nº DE INSCRIÇÃO:

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

- Confira os campos Nº DE ORDEM, Nº DE INSCRIÇÃO e NOME, conforme o que consta na etiqueta fixada em sua carteira.
- Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante na etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
- É proibido folhear o caderno de provas antes do sinal, às 9 horas.
- Após o sinal, confira se este caderno contém 40 questões objetivas (20 de cada matéria) e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
- O tempo mínimo de permanência na sala é de 1h e 30min após o início da prova.
- No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluído o de preenchimento da Folha de Respostas.
- Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta será a soma dos números associados às alternativas corretas. Para cada questão, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma das alternativas 01 e 08).
- Se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas constante nesta prova e destaque-o, para retirá-lo hoje, nesta sala, no horário das 13h15min às 13h30min, mediante apresentação do documento de identificação do candidato. Após esse período, não haverá devolução.
- Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas e o Rascunho para Anotação das Respostas.



Corte na linha pontilhada.

RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS

Nº DE ORDEM:

NOME:

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20



UEM – Comissão Central do Vestibular Unificado

GABARITO 4

Questão 01

Se o polinômio $p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12$ apresenta o número complexo $z = 2i$ como um dos seus zeros, então é **correto** afirmar que

- 01) a equação $p(x) = 0$ apresenta 3 raízes reais.
- 02) a soma das raízes de $p(x) = 0$ é -2 e o produto é -12 .
- 04) dois dos zeros de $p(x)$ são soluções da equação $x^2 + 2x - 3 = 0$.
- 08) $p(x)$ é divisível por $x^2 - 4$.
- 16) os gráficos dos polinômios $-p(x)$ e $p(x)$ apresentam as mesmas interseções com os eixos coordenados.

Questão 02

Assinale o que for **correto** com respeito às matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a+1 \\ a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \text{ sendo } a, b, x,$$

y e z números reais.

- 01) A não é uma matriz nula.
- 02) Se $a \neq 0$, então A possui inversa.
- 04) Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então a equação matricial $A.X = B$ possui uma única solução.
- 08) Se $a = -1$, então a equação matricial $A.X = B$ não possui solução.
- 16) Se $A^2 = A$, então $a = 0$ e $b = 1$.

Questão 03

Assinale o que for **correto**.

01) $12^3 \times 9^2 = 3 \times 6^6$.

02) $\left(\frac{x^2}{2(x^2+1)^2} - \frac{1}{2(x^2+1)} \right) = \frac{1}{2(x^2+1)^2}$.

04) Se $A = [-3, 0]$ e $B = [-1, 5]$ são intervalos da reta real, então $A \cap B = \{0, 1\}$.

08) $10 \times \sqrt{10} \times \sqrt{\sqrt{10}} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} \times \dots = 100$.

16) $\left(\frac{1}{20000} - (0,1)^2 \times 0,003 \right)^2 = 4 \times 10^{-10}$.

Questão 04

Considere um número complexo $z = x + yi$, tal que o número complexo $w = \frac{z}{\bar{z}}$ exista, sendo \bar{z} o conjugado de z . Assinale o que for **correto**.

01) $w = \frac{(x^2 + y^2) + 2xyi}{x^2 - y^2}$, em que $y \neq |x|$.

02) Se $|x| = |y|$, então w será um número imaginário puro.

04) Se $x = -2$ e $y = -1$, então w terá uma representação geométrica no 1.º quadrante.

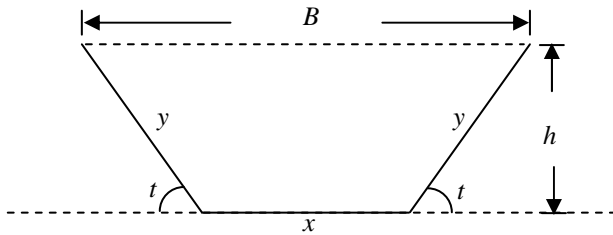
08) A condição sob a qual w tem a parte real positiva pode ser expressa por $x > \pm y$.

16) w será um número real, apenas se z for um número real.

Rascunho

INSTRUÇÃO: as questões 05 e 06 dizem respeito ao conteúdo exposto a seguir.

Uma calha para drenagem de água é construída usando-se uma chapa metálica retangular medindo $60\text{ cm} \times 20\text{ m}$, dobrada no sentido longitudinal. A seção transversal da calha é mostrada na figura.



O ângulo $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$ é medido a partir da reta horizontal que contém a base da seção da calha e as medidas x e y satisfazem à equação $x + 2y = 60\text{ cm}$.

Questão 05

Sobre o conteúdo exposto anteriormente, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

- 01) Se $x = y$ e $t = \frac{\pi}{2}$, a área da seção transversal da calha é $0,4\text{ m}^2$.
- 02) Se $x = y$, o comprimento de B é dado por $B = 20(1 + 2\cos t)$ cm.
- 04) Se $x = y$, a área da seção transversal da calha em termos de t , em cm^2 , é representada pela função real f , sendo $f(t) = 200(2\sin t + \sin 2t)$.
- 08) Se $x = y$, a área da seção transversal da calha para $t = \frac{\pi}{6}$ é menor do que a área da seção transversal para $t = \frac{\pi}{2}$.
- 16) Se t for fixado, a altura da calha em termos de x , em cm, é dada pela função $h(x) = (60 - x)\sin t$, $0 < x < 60$.

Questão 06

Considerando o conteúdo exposto anteriormente e supondo que $x = y$, que a medida de B é 40 cm, que $\sqrt{3} \approx 1,7$ e que $\pi = 3,1$, assinale o que for **correto**.

- 01) A medida do ângulo t é $\frac{\pi}{6}$ radianos.
- 02) O volume suportado pela calha é 1 m^3 , desprezando-se as frações do metro cúbico.
- 04) O volume suportado pela calha é equivalente ao volume total de 4 reservatórios com o formato de cubos com arestas medindo 50 cm.
- 08) A área da seção transversal da calha é igual à de um círculo cujo diâmetro mede exatamente 20 cm.
- 16) Em caso de entupimento na saída da calha e considerando que a mesma receba água a uma vazão de 30 litros por minuto, ocorrerá transbordamento antes que decorram 35 minutos.

Questão 07

Considere o desenvolvimento binomial do binômio $(x - y)^{11}$, ordenado em potências decrescentes de x , para assinalar a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

- 01) A soma dos valores absolutos dos coeficientes do desenvolvimento dado é igual à soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(|x| - |y|)^{11}$.
- 02) A soma dos coeficientes dos termos em potências pares de x é 2^{10} .
- 04) Existem 55 maneiras de escolher ao acaso uma dupla de coeficientes do desenvolvimento do binômio.
- 08) Escolhendo-se ao acaso uma dupla de coeficientes do desenvolvimento do binômio, a probabilidade de que a soma desses coeficientes seja zero é $\frac{1}{11}$.
- 16) Escolhendo-se ao acaso uma dupla de coeficientes do desenvolvimento do binômio, a probabilidade de que o produto desses coeficientes seja positivo é $\frac{5}{11}$.

Rascunho

Questão 08

Seja $y = f(x)$ uma função real de uma variável real cujo domínio é o intervalo $[-4, 5]$ e cuja imagem é o intervalo $[-2, \frac{9}{4}]$. O gráfico de f , após ter sido traçado em sistema de coordenadas cartesianas, pode ser percorrido inteiramente com a ponta de um lápis, sem levantá-lo da folha de papel, e é constituído pelos seguintes elementos geométricos:

- (i) a porção não-negativa da parábola que contém o ponto de coordenadas $(-3, 0)$ e cujo vértice é o ponto de coordenadas $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$;
- (ii) dois segmentos de reta disjuntos, ambos de comprimento $\sqrt{5}$ e com inclinações -2 ;
- (iii) um segmento de reta perpendicular a um dos segmentos do item (ii), de comprimento $2\sqrt{5}$ e tendo um extremo com ordenada igual a zero.

Com relação a essa função, assinale o que for **correto**.

- 01) $f(x) = -2x$, se $x \in [-4, -3]$.
- 02) Se $0 \leq x \leq 5$, então $-2 \leq f(x) \leq 0$.
- 04) $f(x) = 1$ para exatamente três distintos valores de x .
- 08) $f(x)$ atinge o valor mínimo em $x = 0$.
- 16) f é injetora no intervalo $[-\frac{3}{2}, 0]$.

Questão 09

Considere uma função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a + \log_b x$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $b \neq 1$ e satisfazendo às condições $f(2) = 0$ e $f(\frac{1}{5}) = -1$. Assinale o que for **correto**.

- 01) Os valores de a e b satisfazem à equação $2.b^a = 1$.
- 02) $f(x) = \log_{10} \frac{x}{2}$.
- 04) $f(xy) = f(x) + f(2y)$.
- 08) $f(10^x) = x$.
- 16) O gráfico da função f^{-1} , a inversa de f , contém os pontos $(0, \frac{1}{2})$ e $(-1, 5)$.

Rascunho

Questão 10

Rascunho

Uma pessoa efetua uma compra cujo valor bruto é R\$ 2.000,00, aceitando quitá-la em 10 prestações mensais, sem entrada. O valor de cada prestação é constituído por $\frac{1}{10}$ do valor bruto da compra acrescido

de 5% de juros ao mês cobrados sobre o saldo devedor

D_n , calculado por $D_n = 2000\left(1 - \frac{n-1}{10}\right)$, $n = 1, 2, \dots, 10$.

O pagamento da primeira prestação ocorrerá 30 dias após a compra. Suponha que todos os pagamentos serão efetuados sem atraso. Sobre o exposto, assinale o que for **correto**.

- 01) O valor da 3.^a prestação é R\$ 280,00.
 02) O valor médio de cada prestação é R\$ 250,00.
 04) O juro total a ser pago não ultrapassa 25% do valor da compra.
 08) Existe uma prestação cujo valor é exatamente o valor médio das prestações.
 16) Para o cálculo do valor da n .^a prestação a ser paga, pode-se usar a seguinte relação funcional:
 $f(n) = 300 - 10(n - 1)$, $n = 1, \dots, 10$.

Questão 11

Considere os números naturais colocados ordenadamente em linhas da disposição triangular mostrada na figura e suponha que a distribuição continue, indefinidamente, obedecendo ao mesmo padrão.

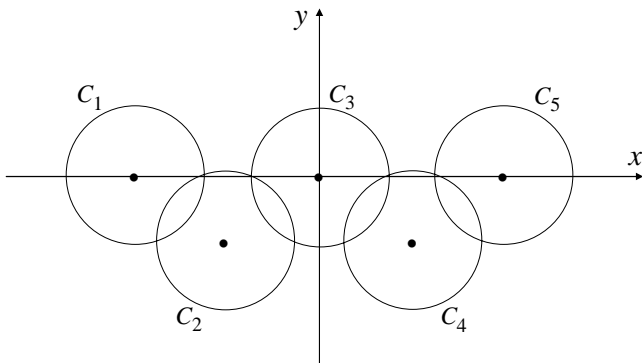
```

      1
     2 3 4
    5 6 7 8 9
   10 11 ... ..
  ... ..
```

Sobre o exposto, é **correto** afirmar que

- 01) a coluna central não contém números compostos.
 02) a linha de ordem k contém $(2k - 1)$ números naturais, $k = 1, 2, \dots$
 04) a quantidade de números naturais escritos até o final da linha k é k^2 , $k = 1, 2, \dots$
 08) a soma de todos os números naturais escritos até o final da 20.^a linha é 80.200.
 16) o número natural 628 é o quarto número da 26.^a linha.

A figura abaixo ilustra o símbolo olímpico representado em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.



As cinco circunferências C_1 , C_2 , C_3 , C_4 e C_5 têm todos raios iguais a 3cm. C_3 é centrada na origem do sistema e C_1 e C_5 têm os centros no eixo das abscissas equidistantes da origem. Os centros de C_2 e C_4 têm mesma ordenada negativa e situam-se a $2\sqrt{6}$ cm da origem. As circunferências C_2 e C_3 interceptam-se em dois pontos, sendo um deles de coordenadas $(-3, 0)$. Com relação ao exposto, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

- 01) A equação reduzida da circunferência C_2 é $(x+4)^2 + (y+2\sqrt{2})^2 = 9$.
- 02) Os centros de C_2 e C_4 estão a $2\sqrt{2}$ cm do eixo das ordenadas.
- 04) O par de coordenadas de um dos pontos de interseção das circunferências C_3 e C_4 é $(3, -2\sqrt{2})$.
- 08) O ponto de coordenadas $(-10, \sqrt{5})$ pertence a uma das circunferências do símbolo olímpico.
- 16) A circunferência C_5 pode ser descrita pela equação

$$x^2 - 16x + y^2 + 54 = 0.$$

Questão 13

Considere o seguinte sistema de equações lineares de incógnitas reais x e y em que k , m e n são constantes reais:

$$\begin{cases} 6x + ky = 15 \\ mx + y = -3 \\ 2x + y = n \end{cases}$$

Com respeito ao sistema, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

- 01) Se $n = 5$, o sistema pode ter infinitas soluções.
02) Se $m = 2$, o sistema não possui solução.
04) Se $n = -3$, $m = 2$ e $k \neq 3$, o sistema possui uma única solução.
08) O sistema dado não é homogêneo.
16) O par ordenado $(0, 0)$ é solução do sistema para convenientes valores de k , m e n .

Questão 14

Considere, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy , os pontos $A(0, 0)$, $B(0, 5)$ e $C(a, 2a)$, em que $a > 0$, e assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

- 01) O triângulo ABC pode ser equilátero.
02) A reta de equação $y = -\frac{1}{2}x + 20$ é perpendicular à reta que contém os pontos A e C .
04) Se $a = 2$, então o triângulo ABC é retângulo.
08) Se a área do triângulo ABC mede 10 unidades de área, então C tem coordenadas $(5, 10)$.
16) Se D é um ponto tal que $ABCD$ seja um losango, então as coordenadas de D são $(4, 3)$.

Rascunho

Questão 15

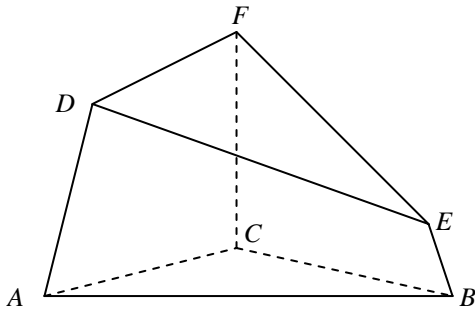
Rascunho

Uma fábrica necessita diminuir o tempo de empacotamento de sua produção diária. Para isso, adquire uma nova máquina com a capacidade de empacotar sua produção diária em 2 horas. A máquina antiga, para o mesmo trabalho, emprega 3 horas. Assinale o que for **correto**.

- 01) As duas máquinas juntas empacotam, em 1 hora, $\frac{5}{6}$ da produção diária.
- 02) As duas máquinas juntas levam 1 hora e dois minutos para empacotar a produção diária.
- 04) Se a fábrica triplicar a produção diária, as duas máquinas juntas realizarão o trabalho de empacotamento em 4 horas.
- 08) Fazendo as duas máquinas operarem juntas durante 6 horas diárias, a fábrica poderá multiplicar a sua produção diária por 5.
- 16) Se a meta da fábrica fosse, com duas máquinas, empacotar a produção diária em 1 hora, deveria ter comprado uma máquina que empacotasse sua produção diária em 1 hora e 45 minutos.

Questão 16

O sólido S , ilustrado na figura abaixo, foi obtido seccionando-se uma pirâmide não regular, por um plano não paralelo à base da mesma, subtraindo-se a porção que contém o vértice. Com essas considerações, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.



- 01) Os planos que contêm as faces laterais do sólido S interceptam-se em um ponto.
- 02) Os planos que contêm as faces ABC e DEF interceptam-se em apenas um ponto.
- 04) A reta suporte da aresta DF não intercepta o plano que contém a face ABC .
- 08) Não existe um plano que contenha as retas suportes das arestas AC e DE .
- 16) A aresta EB é perpendicular a alguma reta do plano que contém a face ABC .

Questão 17

Um certo triângulo ABC satisfaz à seguinte condição:

$\widehat{\text{sen}}\widehat{A} = 2 \widehat{\text{sen}}\widehat{B} \cos\widehat{C}$ (I), em que \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} são, respectivamente, os ângulos \widehat{CAB} , \widehat{ABC} e \widehat{BCA} do triângulo, e apenas \widehat{A} pode ser um ângulo reto. Assinale o que for **correto**.

- 01) A condição (I) é válida para todo triângulo isósceles, retângulo em \widehat{A} .
- 02) A condição (I) pode ser escrita como $\widehat{\text{sen}}(\widehat{B} + \widehat{C}) = 2 \widehat{\text{sen}}\widehat{B} \cos\widehat{C}$.
- 04) A condição (I) pode ser escrita como $\widehat{\text{tg}}\widehat{B} = \widehat{\text{tg}}\widehat{C}$.
- 08) O triângulo ABC é isósceles.
- 16) Todo triângulo isósceles satisfaz à condição (I).

Questão 18

Considere os números complexos $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i \widehat{\text{sen}}\frac{\pi}{3})$

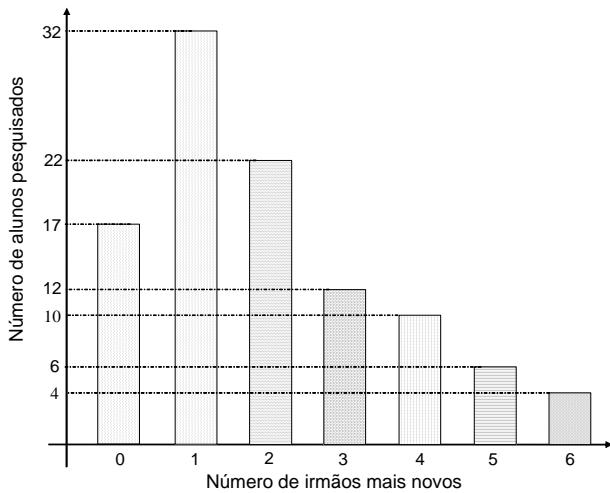
e $z_2 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i \widehat{\text{sen}}\frac{7\pi}{6})$ e as suas representações no plano complexo xOy . Considere ainda que, se z é um número complexo, então \overline{z} representa o seu conjugado. Sobre o exposto, é **correto** afirmar que

- 01) $|\overline{z_1}| = |\overline{z_2}|$.
- 02) $(z_1)^7 = 32(z_2)^2$.
- 04) z_1 e z_2 pertencem à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2$.
- 08) z_1 é solução da equação $z^2 - 2z + 4 = 0$.
- 16) a medida do segmento que une z_1 e z_2 é $(1 + \sqrt{3})$ unidades de comprimento.

Rascunho

Questão 19

Uma escola realiza uma pesquisa junto a todos os seus alunos da quinta série para saber a existência de irmãos mais novos na família e obteve os dados mostrados no gráfico abaixo.



Sobre os alunos matriculados na quinta série dessa escola, assinale o que for **correto**.

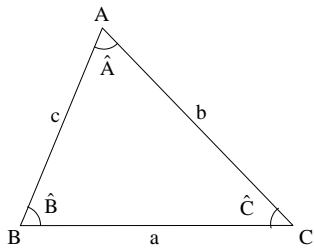
- 01) O número total de crianças matriculadas na quinta série dessa escola com pelo menos um irmão mais novo é 86.
- 02) O número mediano de irmãos mais novos é 1.
- 04) O número médio de irmãos mais novos é 2.
- 08) O percentual de alunos com mais de três irmãos mais novos é exatamente 20%.
- 16) Excluindo-se a primeira barra do gráfico, o número médio de irmãos mais novos diminui.

Questão 20

Inscrevem-se, em uma esfera de raio $R > 0$, dois cones circulares retos tendo como base comum um círculo de raio $r > 0$ e vértices diametralmente opostos. Seja x a distância do centro da esfera ao centro da base dos cones. Com essas considerações, assinale a(s) alternativa(s) **correta(s)**.

- 01) x pode assumir todos os valores no intervalo $[0, R)$.
- 02) Se $x = 0$, a soma dos volumes dos cones é $\frac{1}{4}$ do volume da esfera.
- 04) A razão do volume do cone maior para o volume do cone menor é expresso por $\frac{R+x}{R-x}$, sendo $x > 0$.
- 08) Se $x = \frac{R}{2}$, o volume do cone maior é o dobro do volume do cone menor.
- 16) A soma dos volumes dos cones não excede o volume de um hemisfério da esfera.

MATEMÁTICA – Formulário

Trigonometria	$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$ $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg}(x) \pm \operatorname{tg}(y)}{1 \mp \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$		<p><i>Lei dos senos:</i></p> $\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$ <p><i>Lei dos cossenos:</i></p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$
Análise Combinatória	$P_n = n!$ $A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$	$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_{n,i} a^{n-i} b^i$	
Geometria Plana e Espacial	<p>Área do losango: $A = \frac{dD}{2}$</p> <p>Área do trapézio: $A = \frac{(b+B)h}{2}$</p> <p>Área do círculo: $A = \pi R^2$</p> <p>Área lateral do cilindro: $A = 2\pi R h$</p> <p>Área lateral do cone: $A = \pi R g$</p> <p>Área da superfície esférica: $A = 4\pi R^2$</p>	<p>Volume do cubo: $V = a^3$</p> <p>Volume do prisma: $V = B \cdot h$</p> <p>Volume da pirâmide: $V = \frac{B \cdot h}{3}$</p> <p>Volume do cilindro: $V = \pi R^2 h$</p> <p>Volume do cone: $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$</p> <p>Volume da esfera: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$</p>	
Progressões	<p>Progressão Aritmética (P. A.):</p> $a_n = a_1 + (n-1)r$ $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$	<p>Progressão Geométrica (P. G.):</p> $a_n = a_1 q^{n-1}$ $S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q}, q \neq 1$ $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, q < 1$	
Geometria Analítica	<p>Área do triângulo de vértices $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ e $R(x_3, y_3)$:</p> $A = \frac{1}{2} D , \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$	<p>Distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $r: ax + by + c = 0$:</p> $d_{P,r} = \left \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right $	